8|14

1932 № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК



BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ • EXEMPLE DE CITATION

А. В. Шубников. Кристалл как непрерывная среда.
ИМЕН, 1932, № 6, стр. 799.

A. Šubnikov. Cristal comme un milieu continu.
BAS-MN, 1932, № 6, p. 799 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Июль 1932 г.

Непременный Секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров
Ученый корректор Е. А. Ростовцева

Сдано в набор в мае 1932 г. — Подписано к печати 22 июля 1932 г.

122 (735—856) стр. + 5 табл. (24 фиг.)
Формат бум. 72 × 110 см. — 9 печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 2000
Ленгорлит № 46789. — АНИ № 196. — Заказ № 1383
Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПЕРЕМЕЩАЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ В МЕТОДЕ АКАДЕМИКА А. Н. КРЫЛОВА

Н. Н. ЛУЗИНА

Часть вторая *

§ 11. Чтобы судить о том, какие именно из корней векового уравнения (1) служат корнями составленного уравнения $D(\lambda)=0$ (V*) и в каких кратностях, мы прибегнем к геометрическим представлениям.

С этой целью мы возьмем какую-нибудь точку $P(a, b, c, \ldots, f)$ евклидова пространства k измерений $\mathcal{E}$, отличную от начала координат O, и обозначим через V определяемый ею вектор. Пусть, согласно предыдущему, вектора

$$V, V_1, V_2, \ldots, V_{\mu-1}, V_\mu \tag{183}$$

будут последовательными преобразованиями начального вектора V помощью подстановки A', причем пусть вектор V_μ будет *первым* вектором, зависимым от предыдущих. Мы обозначаем минимальное евклидово многообразие, содержащее вектора $V, V_1, V_2, \ldots, V_{\mu-1}$ чрез $\mathcal{E}_{\mu-1}$. Мы знаем, что $\mathcal{E}_{\mu-1}$ есть *характеристическое* многообразие μ измерений, содержащее вектор V_μ.

Мы знаем также, что $\mathcal{E}_{\mu-1}$ есть, вместе с тем, и *минимальное характеристическое многообразие, содержащее точку P*. Все дело сводится к изучению ориентации многообразия $\mathcal{E}_{\mu-1}$ по отношению к характеристическим прямым в пространстве $\mathcal{E}$. Здесь мы различаем *три* случая.

Случай I: все корни векового уравнения различны.

Обозначим чрез $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ эти корни и чрез $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_k$ соответствующие им характеристические прямые. Мы уже знаем, что все эти прямые независимы между собою.

* См. ИМЕН, 1932, № 5, стр. 595.

Пусть теперь H есть *какое-нибудь* характеристическое многообразие $\varkappa$ измерений, содержащееся в пространстве $\mathcal{E}$. Следовательно, подстановка A', написанная символически в виде

$$y = A'(x) \tag{184}$$

или в раскрытом виде

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \cdots + a_{k1}x_k \\
y_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \cdots + a_{k2}x_k \\
y_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{k3}x_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_k &= a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + a_{3k}x_3 + \cdots + a_{kk}x_k
\end{aligned}\right\} \tag{A'}$$

преобразует H в себя самого.

Выберем теперь другую систему осей координат

$$OX_1,\ OX_2,\ OX_3,\ \ldots,\ OX_k$$

таким образом, чтобы $\varkappa$ первых осей $OX_1, OX_2, \ldots, OX_\varkappa$ содержались в многообразии H. Пусть формулами преобразования осей координат будут

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + \cdots + b_{1k}X_k \\
x_2 &= b_{21}X_1 + b_{22}X_2 + \cdots + b_{2k}X_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_k &= b_{k1}X_1 + b_{k2}X_2 + \cdots + b_{kk}X_k
\end{aligned}\right\} \tag{185}$$

которые можно написать символически в виде

$$x = B(X) \tag{186}$$

здесь определитель $|B|$

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kk} \end{vmatrix} \tag{187}$$

отличен от нуля, $|B| \neq 0$.

Подстановка A' заставляет отвечать точке $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ пространства $\mathcal{E}$ определенную точку $Q(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ этого же пространства.

Новые координаты $X_1, X_2, \ldots, X_k$ точки P выражаются чрез символическое уравнение (186); аналогично, новые координаты $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ точки Q выразятся чрез символическое уравнение

$$y = B(Y) \tag{188}$$

Приняв во внимание равенство (184), связывающее старые координаты точек P и Q, мы видим, что новые координаты этих точек связаны символическим соотношением

$$Y = B^{-1} A' B(X) \tag{189}$$

которое мы напишем в раскрытом виде следующим образом

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = a_{11}^* X_1 + a_{21}^* X_2 + \cdots + a_{k1}^* X_k \\ Y_2 = a_{12}^* X_1 + a_{22}^* X_2 + \cdots + a_{k2}^* X_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_k = a_{1k}^* X_1 + a_{2k}^* X_2 + \cdots + a_{kk}^* X_k \end{array}\right\} \tag{190}$$

Матрица $(A^*)'$ этого преобразования есть перевернутая матрица A^*

$$A^* = \left\| \begin{array}{llll} a_{11}^* & a_{12}^* & \ldots & a_{1k}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \ldots & a_{2k}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}^* & a_{k2}^* & \ldots & a_{kk}^* \end{array} \right\| . \tag{191}$$

Из равенства (189) мы заключаем, что

$$(A^*)' = B^{-1} A' B \tag{192}$$

т. е. что матрица $(A^*)'$ преобразования (190) есть преобразование матрицы A' помощью матрицы B.

Известно из теории матриц, что при таком преобразовании корни векового уравнения сохраняются. Следовательно, корни векового уравнения

$$\left| \begin{array}{llll} a_{11}^* - \lambda & a_{21}^* & \ldots & a_{k1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* - \lambda & \ldots & a_{k2}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1k}^* & a_{2k}^* & \ldots & a_{kk}^* - \lambda \end{array} \right| = 0 \tag{193}$$

суть те же самые, что и у векового уравнения, определенного матрицею A', и, значит, тождественны корням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ данного векового уравнения (1). А из самого смысла преобразования *осей координат* явствует, что характеристические прямые преобразования (190) пространства $\mathcal{E}$ самого в себя остаются попрежнему прямыми $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_k$, только отнесенными к новой системе осей координат.

Но теперь характеристическое многообразие H получается полагая

$$X_{\varkappa+1}=0,\ X_{\varkappa+2}=0,\ \ldots,\ X_k=0 \tag{194}$$

и, значит, мы обязаны иметь одновременно с равенствами (194), при любых величинах $X_1, X_2, \ldots, X_\varkappa$, также и равенства

$$Y_{\varkappa+1}=0,\ Y_{\varkappa+2}=0,\ \ldots,\ Y_k=0 \tag{195}$$

что возможно лишь при уничтожении всех элементов a_{ij}^* матрицы $(A^*)'$, стоящих в $k-\varkappa$ последних ее строках и $\varkappa$ первых ее столбцах:

$$a_{ij}^*=0 \qquad (1\leqslant i\leqslant\varkappa,\ \varkappa+1\leqslant j\leqslant k). \tag{196}$$

В этих условиях определитель (193) является произведением двух определителей

$$\begin{vmatrix} a_{11}^*-\lambda & a_{21}^* & \ldots & a_{\varkappa1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^*-\lambda & \ldots & a_{\varkappa2}^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1\varkappa}^* & a_{2\varkappa}^* & \ldots & a_{\varkappa\varkappa}^*-\lambda \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a^*_{\varkappa+1,\,\varkappa+1}-\lambda & \ldots & a^*_{k,\,\varkappa+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^*_{\varkappa+1,\,k} & \ldots & a^*_{kk}-\lambda \end{vmatrix} \tag{197}$$

Пусть корнями первого определителя являются корни

$$\lambda_{s_1},\ \lambda_{s_2},\ \lambda_{s_3},\ \ldots,\ \lambda_{s_\varkappa} \tag{198}$$

векового уравнения (1); здесь $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ суть различные между собою целые положительные числа из совокупности $1, 2, 3, \ldots, k$.

Определим положение характеристической прямой λ_{s_i} для какого-нибудь корня λ_{s_i} из совокупности (198). С этой целью, следуя правилу, установленному выше, мы должны решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}
(a_{11}^* - \lambda_{s_i}) X_1^0 + a_{21}^* X_2^0 + \cdots + a_{k1}^* X_k^0 = 0 \\
a_{12}^* X_1^0 + (a_{22}^* - \lambda_{s_i}) X_2^0 + \cdots + a_{k2}^* X_k^0 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{1k}^* X_1^0 + a_{2k}^* X_2^0 + \cdots + (a_{kk}^* - \lambda_{s_i}) X_k^0 = 0
\end{array}\right\} \quad (199)$$

аналогичную системе уравнений (164).

Но в силу равенств (196), последние $k-\varkappa$ уравнений должны писаться в виде

$$\left.\begin{array}{l}
(a_{\varkappa+1,\,\varkappa+1}^* - \lambda_{s_i}) X_{\varkappa+1}^0 + \cdots + a_{k,\,\varkappa+1}^* X_k^0 = 0 \\
a_{\varkappa+1,\,\varkappa+2}^* \quad X_{\varkappa+1}^0 + \cdots + a_{k,\,\varkappa+2}^* X_k^0 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{\varkappa+1,\,k}^* \quad X_{\varkappa+1}^0 + \cdots + (a_{kk}^* - \lambda_{s_i}) X_k^0 = 0
\end{array}\right\} \quad (200)$$

С другой стороны, вековое уравнение (1) не имеет кратных корней по условию; и так как корень λ_{s_i} уже обращает в нуль первый определитель произведения (197), то отсюда следует, что определитель системы (200) отличен от нуля. Поэтому, мы необходимо должны иметь

$$X_{\varkappa+1}^0 = 0,\ X_{\varkappa+2}^0 = 0,\ \ldots,\ X_k^0 = 0 \quad (201)$$

что̀ показывает, что характеристическая прямая L_{s_i} должна лежать в многообразии H. И так как здесь число i есть любое из чисел $1, 2, 3, \ldots, \varkappa$, то отсюда заключаем о справедливости предложения:

Если корни векового уравнения (1) все различны, тогда всякое характеристическое многообразие H (по отношению к подстановке A') содержит в себе в точности столько характеристических прямых, сколько единиц в его измерении.

Это же самое можно выразить еще иначе, сказав, что, при отсутствии кратных корней у векового уравнения (1), получают все без исключения характеристические (по отношению к A') многообразия в пространстве $\mathscr{E}$, беря различные совокупности характеристических прямых и обтягивая каждую из этих совокупностей минимальным евклидовым многообразием.

§ 12. Только что доказанное важное предложение дает полную возможность установить, какие именно, в рассматриваемом случае, корни имеет составляемое в методе акад. А. Н. Крылова алгебраическое уравнение

$$D(\lambda) = 0. \qquad (V^*)$$

Для этого обозначим через

$$\left.\begin{matrix} L_1, L_2, L_3, \ldots, L_k \\ L_1, L_2, L_3, \ldots, L_k \end{matrix}\right\} \qquad (202)$$

характеристические прямые, соответствующие обоим подстановкам A' и A, причем пусть модуль сдвига для прямых L_i и L_i равен корню λ_i векового уравнения (1).

Покажем сначала, что прямые L_i и L_j при $i \neq j$ перпендикулярны между собою, а при $i = j$ делают угол, отличный от 90°.

В самом деле, мы уже знаем, что система уравнений

$$\left.\begin{matrix} (a_{11} - \lambda_i)\xi_1 + a_{21}\xi_2 + a_{31}\xi_3 + \cdots + a_{k1}\xi_k = 0 \\ a_{12}\xi_1 + (a_{22} - \lambda_i)\xi_2 + a_{32}\xi_3 + \cdots + a_{k2}\xi_k = 0 \\ a_{13}\xi_1 + a_{23}\xi_2 + (a_{33} - \lambda_i)\xi_3 + \cdots + a_{k3}\xi_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1k}\xi_1 + a_{2k}\xi_2 + a_{3k}\xi_3 + \cdots + (a_{kk} - \lambda_i)\xi_k = 0 \end{matrix}\right\} \qquad (203)$$

определяет вектор $V_i'(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k)$, лежащий на характеристической прямой L_i.

Аналогично, система уравнений

$$\left.\begin{matrix} (a_{11} - \lambda_j)\eta_1 + a_{12}\eta_2 + a_{13}\eta_3 + \cdots + a_{1k}\eta_k = 0 \\ a_{21}\eta_1 + (a_{22} - \lambda_j)\eta_2 + a_{23}\eta_3 + \cdots + a_{2k}\eta_k = 0 \\ a_{31}\eta_1 + a_{32}\eta_2 + (a_{33} - \lambda_j)\eta_3 + \cdots + a_{3k}\eta_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\eta_1 + a_{k2}\eta_2 + a_{k3}\eta_3 + \cdots + (a_{kk} - \lambda_j)\eta_k = 0 \end{matrix}\right\} \qquad (204)$$

определяет вектор $V_j''(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_k)$, лежащий на характеристической прямой L_j.

Помножим уравнения системы (203) соответственно на $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots \eta_k$ и сложим. Диагональные члены с λ_i в сумме дадут

$$-\lambda_i(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 + \cdots + \xi_k\eta_k);$$

остальные же члены с коэффициентами a_{ij}, по сложении их столбцами, в силу уравнений (204) дадут $\lambda_j(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 + \ldots + \xi_k\eta_k)$. Значит, мы будем иметь

$$(\lambda_j - \lambda_i)(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 + \cdots + \xi_k\eta_k) = 0. \qquad (205)$$

Так как при $i \neq j$ имеем $\lambda_i \neq \lambda_j$, то ясно, что равенство (205) устанавливает взаимную перпендикулярность* прямых L_j и L_i.

С другой стороны, невозможно, чтобы прямые L_i и L_i были бы также взаимно-перпендикулярны. Действительно, в противном случае, прямая L_i будет перпендикулярна ко *всем* прямым L_1, L_2, L_3, ..., L_k и, значит, должна будет выйти совсем из пространства $\mathcal{E}$, что невозможно, так как L_i заведомо содержится в $\mathcal{E}$. (Ч. т. д.)

Установив это, возвратимся к обозначениям начала предыдущего параграфа. Мы уже знаем, что характеристическое многообразие $\mathcal{E}_{\mu-1}$, имея своим измерением μ, должно содержать в точности μ характеристических прямых по отношению к A'; пусть это будут прямые

$$L_{s_1}, L_{s_2}, L_{s_3}, \ldots, L_{s_\mu}, \qquad (206)$$

где числа $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_\mu$ суть неравные между собою числа из $1, 2, 3, \ldots, k$.

Покажем, что вектор V и прямая L_{s_i} ($i = 1, 2, 3, \ldots, \mu$) не могут быть перпендикулярны друг к другу.

В самом деле, мы видели, что прямая L_{s_i} перпендикулярна к каждой из прямых

$$L_1, L_2, \ldots, L_{s_i-1}, L_{s_i+1}, \ldots, L_k. \qquad (207)$$

Поэтому, обозначив чрез Π_{s_i} гиперплоскость в пространстве $\mathcal{E}$, содержащую прямые (207), мы видим, что L_{s_i} перпендикулярна к Π_{s_i}. И так как прямая L_{s_i} не может быть перпендикулярной к L_{s_i}, то отсюда следует что L_{s_i} не может содержаться в гиперплоскости Π_{s_i}.

С другой стороны, раз вектор V перпендикулярен к прямой L_{s_i}, то он обязательно должен содержаться в гиперплоскости Π_{s_i}. Кроме того, гипер-

* Мы предполагаем данную декартову систему осей координат в пространстве $\mathcal{E}$ *прямоугольной*.

плоскость Π_{s_i}, будучи минимальным евклидовым многообразием, содержащим характеристические прямые (207), есть сама характеристическое многообразие по отношению к подстановке A'. И так как $\mathcal{E}_{\mu-1}$ есть *минимальное* характеристическое многообразие по отношению к A', содержащее вектор V, то отсюда следует, что $\mathcal{E}_{\mu-1}$ содержится в гиперплоскости Π_{s_i}.

Отсюда следует, что многообразие $\mathcal{E}_{\mu-1}$ не может содержать прямой L_{s_i}; но так как это противоречит предположению, то отсюда заключаем, что вектор V не может быть перпендикулярным к прямой L_{s_i}, каково бы ни было число i, $1 \leqslant i \leqslant \mu$. (Ч. т. д.)

Установив это, отнесемся к системе равенств (157), выведенных выше; мы полагаем для них $\lambda = \lambda_{s_i}$. Так как все корни векового уравнения (1) различны, то в равенствах (157) необходимо $\nu = 1$ и, значит, вся система этих равенств сводится к одному только первому равенству

$$a\beta_{11} + b\beta_{12} + c\beta_{13} + \cdots + f\beta_{1k} = 0, \tag{157*}$$

в котором $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \ldots, \beta_{1k}$ суть координаты некоторой точки, лежащей на прямой L_{s_i}.

В силу только что доказанного об угле вектора V и прямой L_{s_i} следует, что равенство (157*) заведомо не удовлетворено, т. е. мы наверное имеем

$$a\beta_{11} + b\beta_{12} + c\beta_{13} + \cdots + f\beta_{1k} \neq 0, \tag{208}$$

вместе с чем, в силу равенства (156), мы будем иметь

$$x \neq 0. \tag{209}$$

Отнесясь теперь к равенству (153), мы видим, что должны наверное иметь

$$D(\lambda_{s_i}) = 0 \tag{V*}$$

т. е. корень λ_{s_i} векового уравнения (1) является корнем составляемого по методе акад. А. Н. Крылова уравнения $D(\lambda) = 0$ (V^*).

Так как здесь i есть любое из чисел 1, 2, 3, ..., μ, то *все* корни уравнения $D(\lambda) = 0$ (V^*) суть

$$\lambda_{s_1}, \lambda_{s_2}, \lambda_{s_3}, \ldots, \lambda_{s_\mu}, \tag{210}$$

чтб можно выразить геометрически, сказав:

Корнями составляемого по методе акад. А. Н. Крылова алгебраического уравнения $D(\lambda)=0$ (V^*) являются модули сдвига тех характеристических прямых (по отношению к A'), которые содержатся в многообразии $\mathcal{E}_{\mu-1}$.

Доказанное устанавливает следующую геометрическую картину для методы акад. А. Н. Крылова в случае отсутствия кратных корней у векового уравнения (1):

В пространстве k измерений $\mathcal{E}$ чрез начало координат O проходят k характеристических прямых $L_1, L_2, \ldots, L_k$ по отношению к подстановке A', образующих систему независимых между собою прямых и соответствующих корням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ векового уравнения (1). Прямые $L_1, L_2, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_k$ определяют в пространстве $\mathcal{E}$ гиперплоскость, проходящую чрез них; обозначим ее чрез Π_i и будем называть критической гиперплоскостью, *соответствующей корню λ_i векового уравнения. Каждая из этих критических гиперплоскостей дает случай вырождения для алгебраического уравнения $D(\lambda)=0$ (V^*), составляемого по методе акад. А. Н. Крылова, так как при взятии точки $P(a, b, c, \ldots, f)$ на критической гиперплоскости Π_i уравнение $D(\lambda)=0$ (V^*) заведомо лишено корня λ_i. Чем к бо́льшему числу критических гиперплоскостей принадлежит точка $P(a, b, c, \ldots, f)$, тем сильнее вырождено уравнение $D(\lambda)=0$ (V^*), так как тем бо́льшего числа корней векового уравнения оно лишено. Напротив, если точка $P(a, b, c, \ldots, f)$ взята вне всех критических гиперплоскостей, уравнение $D(\lambda)=0$ (V^*) совпадает с данным вековым уравнением (1) до перемещающего множителя $M(a, b, c, \ldots, f)$, который тогда отличен от нуля.*

В частности, мы имеем предложение:

Теорема IV'. *Если все корни векового уравнения между собой различны, алгебраическое уравнение $D(\lambda)=0$ (V^*), при надлежаще подобранных численных величинах параметров $a, b, c, \ldots, f$, будет лишено наперед заданных корней векового уравнения.*

§ **13.** Выведем из полученного некоторые следствия.

Если данная матрица A есть *симметрическая*, тогда характеристические прямые $L_1, L_2, \ldots, L_k$ перпендикулярны между собою. Действительно, в этом случае прямые L_i и L_i очевидно тождественны.

Если все корни векового уравнения (1) различны и вещественны, тогда и все критические гиперплоскости Π_i также вещественны. В частности, *если данная матрица A есть вещественная и симметрическая, тогда критические гиперплоскости все вещественны.*

Если данная матрица A есть вещественная, но все корни векового уравнения (1) суть различные и мнимые, тогда ни одна из критических гиперплоскостей не может быть вещественной. Действительно, в силу сделанных предположений, вековое уравнение (1) имеет все корни различными и попарно сопряженными. Значит, всякому корню λ_i векового уравнения отвечает сопряженный ему корень $\lambda_j = \overline{\lambda_i}$ и, значит, всякой характеристической прямой L_i соответствует сопряженная характеристическая прямая L_j. Следовательно, если критическая гиперплоскость Π_i вещественна, то сопряженные характеристические прямые L_i и L_j должны обе одновременно: *либо* принадлежать к Π_i, *либо* быть вне Π_i, что невозможно, так как L_i не должна принадлежать к Π_i, а L_j, наоборот, должна протекать в Π_i. Из обнаруженного противоречия следует, что в рассматриваемом случае ни одна из критических гиперплоскостей не есть вещественная.

Установленное влечет справедливость предложения.

Теорема V. *Перемещающий множитель M вещественной косой симметрической матрицы A четного порядка есть знакопостоянная форма параметров $a, b, c, \ldots, f$.*

Предположим обратное, т.-е. что имеются в пространстве $\mathcal{E}$ две точки

$$P'(a', b', c', \ldots, f') \quad \text{и} \quad P''(a'', b'', c'', \ldots, f'');$$

в одной из которых перемещающий множитель $M(a, b, c, \ldots, f)$ положителен, а в другой отрицателен. Соединяя обе точки P' и P'' какою-нибудь непрерывной кривой линией Γ, мы видим, что, в силу непрерывности функции $M(a, b, c, \ldots, f)$, на этой кривой должна обязательно иметься вещественная точка $P_0(a^0, b^0, c^0, \ldots, f^0)$, в которой перемещающий множитель M уничтожается: $M(a^0, b^0, c^0, \ldots, f^0) = 0$. Так как кривая Γ была взята произвольной, то указанное возможно лишь тогда, когда в пространстве $\mathcal{E}$ точки, в которых M равен нулю, образуют вещественную гиперповерхность, т. е. многообразие $k-1$ измерения. Отсюда выводим, что для рассматриваемой матрицы имеется по крайней мере одна вещественная критическая гиперплоскость. Но известно, что корни рассматриваемого векового уравнения должны быть *мнимыми*. Следовательно, если корни все различны, мы уже имеем противоречие и, значит, M есть знакопостоянная форма. Но если имеются мнимые кратные корни, то этот случай можно рассматривать как предельный для случая мнимых различных корней. И так как перемещающий множитель до предела не меняет знака, то и в пределе будет то же самое. (Ч. т. д.)

§ 14. Мы переходим сейчас к рассмотрению случая наличия кратных корней.

Случай II: вековое уравнение допускает кратные корни, но перемещающий множитель не тождественен нулю.

Ранее мы дали полную характеристику этого случая, указав, что необходимым и достаточным условием для него является взаимная простота элементарных делителей Вейерштрасса (98) (см. теорему II нашей упомянутой выше статьи).

После всего того, что было доказано, легко теперь дать другую, также полную, характеристику этого случая, уже без введения в рассмотрение элементарных делителей Вейерштрасса.

Отыщем сначала характеристические прямые для приведенной матрицы $(A^*)'$

$$(A^*)' = \left\| \begin{matrix} A_1^{*\prime} & & & \\ & A_2^{*\prime} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^{*\prime} \end{matrix} \right\| \qquad (211)$$

где

$$A_i^{*\prime} = \left\| \begin{matrix} \lambda_i & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_i \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & \lambda_i \end{matrix} \right\|. \qquad (212)$$

Здесь

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m \qquad (97)$$

суть корни векового уравнения (1), причем корень λ_i есть кратности e_i, и

$$(\lambda - \lambda_1)^{e_1}, (\lambda - \lambda_2)^{e_2}, \dots, (\lambda - \lambda_m)^{e_m} \qquad (98)$$

суть элементарные делители данной матрицы A.

Следуя общему правилу отыскания характеристических прямых, мы должны обратиться к системе уравнений (164), которая для матрицы $(A^*)'$, очевидно, разобьется на независимые между собою частные системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda-\lambda_i)x^0_{s_i}+0x^0_{s_i+1}+0x^0_{s_i+2}+\cdots+0x^0_{t_i}=0 \\ x^0_{s_i}+(\lambda-\lambda_i)x^0_{s_i+1}+0x^0_{s_i+2}+\cdots+0x^0_{t_i}=0 \\ 0x^0_{s_i}+x^0_{s_i+1}+(\lambda-\lambda_i)x^0_{s_i+2}+\cdots+0x^0_{t_i}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0x^0_{s_i}+0x^0_{s_i+1}+0x^0_{s_i+2}+\cdots+(\lambda-\lambda_i)x^0_{t_i}=0 \end{array}\right\} \qquad (213)$$

где s_i и t_i обозначают нумера соответственно первой и последней строки (и столбца) i-ой частной матрицы $A_i^{*\prime}$, и, значит,

$$s_i=e_1+e_2+e_3+\cdots+e_{i-1}+1$$
$$t_i=e_1+e_2+e_3+\cdots+e_{i-1}+e_i,$$

и где λ есть какой-нибудь выбранный из корней векового уравнения (1), для которого ищется характеристическая прямая; в этих формулах (213) надо заставить i пробежать последовательно все числа $1, 2, 3, \ldots, m$.

Ясно, что если $\lambda\neq\lambda_i$, то необходимо имеем

$$x^0_{s_i}=0,\ x^0_{s_i+1}=0, \ldots,\ x^0_{t_i}=0 \qquad (214)$$

и, если $\lambda=\lambda_i$, то имеем

$$x^0_{s_i}=0,\ x^0_{s_i+1}=0, \ldots,\ x^0_{t_i-1}=0,\ x^0_{t_i}=\text{произвольная величина}. \qquad (215)$$

Отсюда мы заключаем, что всякая из осей координат OX_{t_i} является характеристической прямой с модулем сдвига равным λ_i.

Если среди корней (97) нет равных, тогда оси координат

$$OX_{t_1},\ OX_{t_2}, \ldots,\ OX_{t_m}$$

суть *единственные* характеристические прямые матрицы $(A^*)'$. Но если среди корней (97) имеются равные, тогда, как показывают равенства (215), надо взять все оси координат OX_{t_i}, имеющие своим модулем сдвига число λ

и провести чрез них минимальное евклидово многообразие E_λ. Тогда *всякая* прямая линия, проходящая чрез начало координат O и лежащая в E_λ есть характеристическая прямая относительно $(A^*)'$ с модулем сдвига равным λ, и других характеристических прямых с модулем сдвига λ *не имеется.*

Установив это, возвратимся к первоначальной матрице A. Пусть A преобразуется в A^* помощью матрицы B

$$A^* = B^{-1} AB \tag{81}$$

определитель $|B|$ который отличен от нуля. Имеем очевидно

$$A' = B'^{-1} A^{*\prime} B'. \tag{216}$$

Дабы интерпретировать эту формулу, возьмем подстановку $(A^*)'$, которую напишем символически в виде

$$Y = A^{*\prime}(X) \tag{217}$$

это есть преобразование k-мерного пространства $\mathscr{E}$ самого в себя, причем точки $\mathscr{P}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ и $\mathscr{Q}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ являются соответственными. Преобразуем теперь еще раз пространство $\mathscr{E}$ само в себя подстановкою B'. Тогда точки $\mathscr{P}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ и $\mathscr{Q}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ перейдут соответственно в точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и $Q(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, причем имеем символические равенства

$$X = B'(x), \ \ Y = B'(y). \tag{218}$$

Значит, переход от точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ к точке $Q(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ осуществляется подстановкою, определяемой символическим уравнением

$$B'(y) = A^{*\prime} B'(x),$$

откуда

$$y = B'^{-1} A^{*\prime} B'(x), \tag{219}$$

т. е., в силу равенства (216), переход от точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ к точке

$$Q(y_1, y_2, \ldots, y_k)$$

производится как раз подстановкою A'.

Отсюда вытекает важное заключение: *чтобы иметь все характеристические многообразия в пространстве $\mathscr{E}$ относительно подстановки A',*

надо построить в этом пространстве все характеристические многообразия для приведенной подстановки $A^{*\prime}$ и затем преобразовать всё пространство $\mathcal{E}$ помощью подстановки B': тогда вся система характеристических многообразий для $A^{*\prime}$ становится системою всех характеристических многообразий для A'.

В частности, все характеристические прямые для $A^{*\prime}$ перейдут в характеристические прямые для A' с тем же самым модулем сдвига, и обратно.

§ **15.** Приложим сказанное к исследованию настоящего случая, когда перемещающий множитель $M(a, b, c, \ldots, f)$ не тождественен нулю. Мы знаем, что для этого необходимо и достаточно, чтобы все количества

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \tag{97}$$

были *различными*. Следовательно, в пространстве $\mathcal{E}$ имеются лишь характеристические прямые с различными модулями сдвига для редуцированной подстановки $A^{*\prime}$ и, значит, для первоначальной подстановки A'.

Таким образом, мы приходим к важному предложению:

Для того, чтобы перемещающий множитель $M(a, b, c, \ldots, f)$ не был тождественен нулю, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве $\mathcal{E}$ имелись характеристические прямые для A' лишь с существенно-различными попарно модулями сдвига.

Этому условию можно придать несколько другую форму, сказав, что для нетождественности нулю перемещающего множителя

$$M(a, b, c, \ldots, f)$$

необходимо и достаточно, чтобы в пространстве $\mathcal{E}$ имелось лишь *конечное* число характеристических прямых для A'.

Действительно, если имеется две характеристические прямые L и L' с равными модулями сдвига λ и λ', $\lambda = \lambda'$, то и всякая прямая, проходящая через 0 и лежащая в плоскости прямых L и L', есть характеристическая прямая с тем же самым модулем сдвига. (Ч. т. д.)

Найденному условию легко дать чисто алгебраическую формулировку. Действительно, из доказанного следует, что для случая нетождественности $M(a, b, c, \ldots, f)$ нулю необходимо и достаточно, чтобы всякому корню λ, простому или кратному, векового уравнения (1) отвечала бы лишь *одна* характеристическая прямая.

Обращаясь к системе уравнений (164), служащих для отыскания характеристических прямых, мы видим, что система уравнений

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda)x_1^0+a_{21}x_2^0+a_{31}x_3^0+\cdots+a_{k1}x_k^0=0\\ a_{12}x_1^0+(a_{22}-\lambda)x_2^0+a_{32}x_3^0+\cdots+a_{k2}x_k^0=0\\ a_{13}x_1^0+a_{23}x_2^0+(a_{33}-\lambda)x_3^0+\cdots+a_{k3}x_k^0=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{1k}x_1^0+a_{2k}x_2^0+a_{3k}x_3^0+\cdots+(a_{kk}-\lambda)x_k^0=0\end{array}\right\} \qquad (220)$$

должна иметь единственное решение $x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_k^0$, отвлекаясь от множителя пропорциональности. А это последнее обстоятельство возможно, очевидно, тогда и только тогда, когда в определителе

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \ldots & a_{2k}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \ldots & a_{3k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{kk}-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad (1)$$

не все первые миноры равны нулю. Таким образом, мы приходим к предложению:

Теорема VI. *Для того, чтобы перемещающий множитель*

$$M(a, b, c, \ldots, f)$$

не был тождественен нулю, необходимо и достаточно, чтобы никакой кратный корень λ *векового уравнения* (1) *не уничтожал всех первых миноров определителя* (1).

Это предложение дает полную характеристику рассматриваемого случая, уже не прибегая к элементарным делителям Вейерштрасса.

§ **16.** Прежде чем приступить к исследованию корней алгебраического уравнения $D(\lambda)=0$ (V*), к которому приводит метода акад. А. Н. Крылова, мы нуждаемся в важном понятии.

Мы называем какое-нибудь характеристическое многообразие E осевым, *если оно содержит лишь одну характеристическую прямую.*

Очевидно, что всякая характеристическая прямая может быть рассматриваема как осевое многообразие для самой себя. И для случая, когда

все корни векового уравнения (1) различны, других осевых многообразий и не существует. Но когда вековое уравнение (1) имеет кратные корни, тогда могут оказаться и другие осевые многообразия. Они фактически и имеются налицо в случае, если перемещающий множитель не тождественно равен нулю.

Чтобы видеть это, обратимся к приведенной форме (211) матрицы $A^{*\prime}$ и рассмотрим, например, первый корень λ_1 векового уравнения (1); мы знаем, что его кратность есть e_1. Беря преобразование пространства $\mathcal{E}$ определенное матрицей A', и изображая это преобразование символически в виде

$$y = A'(x),$$

мы видим, что, вследствие строения приведенной матрицы $A^{*\prime}$, равенства

$$x_{e_1+1} = 0,\ x_{e_1+2} = 0, \ldots,\ x_k = 0 \tag{221}$$

необходимо влекут равенства

$$y_{e_1+1} = 0,\ y_{e_1+2} = 0, \ldots,\ y_k = 0. \tag{222}$$

Значит, равенства (221) определяют *характеристическое* многообразие измерения e_1; обозначим его чрез $E^{(1)}_{e_1}$. Ясно к тому же, что многообразие $E^{(1)}_{e_1}$ есть *осевое,* так как единственная характеристическая прямая, лежащая в нем, есть очевидно ось OX_{e_1}, тогда как все другие характеристические прямые, т. е. оси $0X_{e_i}$, не принадлежат более к многообразию $E^{(1)}_{e_1}$, но перпендикулярны к нему.

Если мы к равенствам (221) добавим еще равенства

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots,\ x_{e_1-\nu} = 0, \tag{223}$$

где ν есть одно из чисел $1, 2, 3, \ldots, e_1 - 1$, то мы будем иметь, в силу уравнений преобразования, даваемых первой частной матрицей $A_1{}^{*\prime}$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \lambda_1 x_1 \\ y_2 = x_1 + \lambda_1 x_2 \\ y_3 = x_2 + \lambda_1 x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{e_1} = x_{e_1-1} + \lambda_1 x_{e_1} \end{array}\right\} \tag{224}$$

справедливыми равенства:

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0, \ldots,\ y_{e_1-\nu} = 0. \tag{225}$$

Это показывает, что многообразие, определяемое совместными равенствами (221) и (223) есть *характеристическое* с числом измерений, равным ν; обозначим его чрез $E_\nu^{(1)}$. Ясно из самого определения многообразия $E_\nu^{(1)}$, что имеем

$$E_1^{(1)} < E_2^{(1)} < E_3^{(1)} < \cdots < E_{e_1}^{(1)}, \tag{226}$$

т. е. что многообразия $E_\nu^{(1)}$ вложены одно в другое, и что многообразие $E_1^{(1)}$ есть просто характеристическая прямая OX_{e_1}. Ясно, наконец, что все многообразия (226) суть *осевые,* так как не содержат, очевидно, никакой другой характеристической прямой, кроме оси OX_{e_1}.

Ясно, что всё, что было нами сказано относительно корня λ_1, относится и к другим корням $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$. Ясно, наконец, что при каком-нибудь преобразовании всего пространства $\mathcal{E}$ самого в себя, осевое многообразие должно переходить в осевое же. Заметив теперь, что при преобразовании пространства $\mathcal{E}$ помощью подстановки B' (218) матрица $A^{*\prime}$ преобразуется в матрицу A' (216), мы заключаем отсюда о справедливости предложения:

Характеристическая прямая L_i, отвечающая корню λ_i векового уравнения кратности e_i, окружена системою e_i вложенных друг в друга осевых многообразий

$$E_{e_i}^{(i)} > E_{e_i-1}^{(i)} > \cdots > E_3^{(i)} > E_2^{(i)} > E_1^{(i)},$$

причем наибольшее из них имеет своим измерением e_i, а наименьшее из них совпадает с прямой L_i.

Отметим, что все сделанные в этом параграфе рассуждения пока вовсе не предполагают, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ (97) попарно различны друг от друга.

§ **17.** Нашей ближайшей целью является доказательство того важного предложения, что указанные осевые многообразия

$$E_{e_i}^{(i)},\ E_{e_i-1}^{(i)}, \ldots,\ E_3^{(i)},\ E_2^{(i)},\ E_1^{(i)}$$

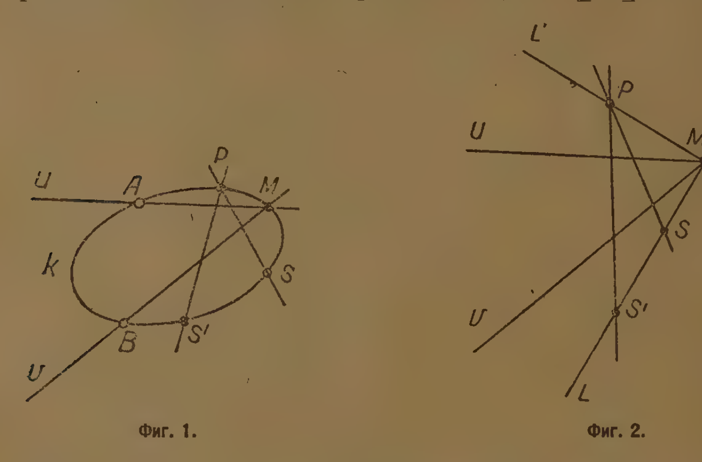
суть *единственные* для характеристической прямой L_i, т. е. что не может существовать никакого другого осевого многообразия H, содержащего прямую L_i.

Прежде чем доказать эту единственность мы нуждаемся в следующем вспомогательном предложении проективной геометрии: *

Всякая коллинеация евклидова пространства $\mathcal{E}$ измерений μ, $\mu > 1$, сохраняющая неподвижными два различных многообразия $\underline{u}$ *и* $\underline{v}$ *измерения* $\mu - 1$, *сохраняет также неподвижными* либо *две существенно различные точки* A *и* B *многообразий* $\underline{u}$ *и* $\underline{v}$, либо *бесчисленное множество точек в пространстве* $\mathcal{E}$. *В случае, когда данная коллинеация и многообразия* $\underline{u}$ *и* $\underline{v}$ *вещественны, неподвижные точки, о которых идет речь, также вещественны.*

Предложение почти очевидно для случая $\mu = 2$.

В самом деле, пусть в плоскости чертежа (фиг. 1) дается коллинеация, сохраняющая неподвижными две различных прямых $\underline{u}$ и $\underline{v}$.



Фиг. 1. Фиг. 2.

Их точка пересечения M есть, очевидно, неподвижная точка. Возьмем теперь какую-нибудь точку S в плоскости чертежа, не принадлежащую прямым $\underline{u}$ или $\underline{v}$, и построим пучок прямых с центром в точке S. Пусть точка S' соответствует точке S в рассматриваемой на плоскости коллинеации. Тогда всякой прямой SP пучка S отвечает определенная прямая $S'P$ пучка прямых, центр которого находится в S'. И очевидно, что оба эти пучка прямых S и S' суть *проективные*.

Поэтому точка P пересечения двух соответственных прямых пучков S и S' описывает некоторое *коническое сечение* k, очевидно проходящее чрез точку M, так же как и чрез центры S и S' пучков.

* Без сомнения можно избежать вторжения в область проективной геометрии и дать теореме единственности чисто-алгебраическое доказательство. На проективный характер предложения единственности обратил мое внимание В. Н. Депутатов.

Ясно, что точки пересечения A и B конического сечения k с данными неподвижными прямыми $\underline{u}$ и $\underline{v}$ суть *неподвижные точки*, которые тем самым уже отысканы.

Одна из этих точек, A или B, может совпасть с точкой M, потому что коническое сечение k может касаться в точке M прямой $\underline{u}$ или прямой $\underline{v}$. Но одновременно обоих этих прямых коническое сечение k касаться не может и, значит, мы необходимо имеем на одной из прямых $\underline{u}$ или $\underline{v}$ *вторую* неподвижную точку, отличную от M.

Если коллинеация вещественна и если прямые $\underline{u}$ и $\underline{v}$ также вещественны, то коническое сечение k, проходя чрез 3 вещественных точки S, S' и M, в силу самой конструкции, пересекает прямые $\underline{u}$ и $\underline{v}$ в *вещественных* же точках A и B.

Если коническое сечение k распадается на пару прямых, L и L', то все заключения остаются прежними, если только обе эти прямые, L и L', не проходят чрез точку M.

В этом последнем случае прямая линия L, содержащая оба центра пучков S и S', должна быть, очевидно, неподвижной прямой. И так как у нас имеется уже *три* неподвижных прямых, $\underline{u}$, $\underline{v}$ и L, то и всякая прямая, проходящая чрез M, будет также неподвижной прямой. В этих условиях прямая L' очевидно будет сплошь состоять из *неподвижных точек*, которых поэтому будет теперь *бесчисленное множество*.

Ясно, что прямая L' не может совпасть с прямой L, так как луч SP произволен и соответственный ему луч $S'P$ не может совпасть с прямой L; значит, точка P не принадлежит прямой L и, следовательно, прямая L' отлична от L.

Отметим, наконец, что мы здесь неявно предположили, что центры пучков, S и S', существенно отличны друг от друга. Но если бы S всегда совпадала с S', то это значило бы, что вся плоскость $\mathcal{E}$ состоит лишь из одних неподвижных точек. (Ч. т. д.)

Дабы избежать всей сложности чисто геометрических рассуждений, возникающей из необходимости рассматривать в отдельности многочисленные частные гипотезы о положении фигур, мы теперь обращаемся к общему алгебраическому доказательству.

Пусть $\mathcal{E}$ есть евклидово пространство μ измерений, $\mu > 1$, и пусть в нем рассматривается коллинеация, которую мы напишем в *однородных* координатах в виде системы $\mu + 1$ линейных однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1\mu}x_\mu + b_1 t \\
x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2\mu}x_\mu + b_2 t \\
x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3\mu}x_\mu + b_3 t \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x'_\mu &= a_{\mu1}x_1 + a_{\mu2}x_2 + a_{\mu3}x_3 + \cdots + a_{\mu\mu}x_\mu + b_\mu t \\
t' &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_\mu x_\mu + gt
\end{aligned}\right\} \qquad (227)$$

где $(x_1 : x_2 : x_3 : \cdots : x_\mu : t)$ суть *однородные* координаты какой-нибудь точки P пространства $\mathcal{E}$, и $(x'_1 : x'_2 : x_3' : \cdots : x'_\mu : t')$ суть однородные координаты соответствующей точки P' в рассматриваемой коллинеации.

Система осей координат в пространстве E всегда может быть выбрана таким образом, чтобы обоими данными неподвижными многообразиями $\underline{u}$ и $\underline{v}$ измерения $\mu - 1$ оказались бы две координатные гиперплоскости

$$x_1 = 0 \qquad (228)$$

и

$$x_2 = 0. \qquad (229)$$

Но тогда равенство (228) должно влечь равенство $x'_1 = 0$ при всяких

$$x_2,\ x_3, \ldots,\ x_\mu,\ t,$$

что возможно лишь при наличии равенств

$$a_{12} = 0,\ a_{13} = 0, \ldots,\ a_{1\mu} = 0,\ b_1 = 0. \qquad (230)$$

Точно так же, равенство (229) влечет

$$a_{21} = 0,\ a_{23} = 0, \ldots,\ a_{2\mu} = 0,\ b_2 = 0. \qquad (231)$$

По свойству однородных координат, точки $P(x_1 : x_2 : x_3 : \cdots : x_\mu : t)$ и $P'(x'_1 : x'_2 : x'_3 : \cdots : x'_\mu : t')$ тождественны тогда и только тогда, когда между их однородными координатами имеется пропорциональность, т. е. когда имеем соотношения

$$x'_1 = \lambda x_1,\ x'_2 = \lambda x_2, \ldots,\ x'_\mu = \lambda x_\mu,\ t' = \lambda t, \qquad (232)$$

где λ есть какая-нибудь *конечная* величина, отличная от нуля.

Следовательно, чтобы отыскать все неподвижные точки для данной коллинеации мы должны сопоставить формулы (227) и (232), что̀, в силу равенств (230) и (231) нам даст

$$\left.\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda)x_1^0=0\\
&(a_{22}-\lambda)x_2^0=0\\
&a_{31}x_1^0+a_{32}x_2^0+(a_{33}-\lambda)x_3^0+\cdots+a_{3\mu}x_\mu^0+b_3t^0=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{\mu1}x_1^0+a_{\mu2}x_2^0+a_{\mu3}x_3^0+\cdots+(a_{\mu\mu}-\lambda)x_\mu^0+b_\mu t^0=0\\
&c_1x_1^0+c_2x_2^0+c_3x_3^0+\cdots+c_\mu x_\mu^0+(g-\lambda)t^0=0
\end{aligned}\right\}\qquad(233)$$

Определитель этой системы однородных уравнений относительно неизвестных $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_\mu^0, t^0$ должен быть равным нулю:

$$\begin{vmatrix}
a_{11}-\lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
0 & a_{22}-\lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} & \ldots & a_{3\mu} & b_3\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda & \ldots & a_{4\mu} & b_4\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{\mu1} & a_{\mu2} & a_{\mu3} & a_{\mu4} & \ldots & a_{\mu\mu}-\lambda & b_\mu\\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots & c_\mu & g-\lambda
\end{vmatrix}=0. \qquad (234)$$

Определитель (234) имеет $\mu+1$ корней, которые мы обозначим чрез $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots, \lambda^{(\mu)}, \lambda^{(\mu+1)}$. Из них два корня нам известны:

$$\lambda'=a_{11} \quad \text{и} \quad \lambda''=a_{22}. \qquad (235)$$

Рассмотрим последовательно все гипотезы.

Гипотеза 1: $a_{11} \neq a_{22}$. В этом случае мы имеем на неподвижных гиперплоскостях $x_1=0$ и $x_2=0$ две существено-различные неподвижные точки A и B.

В самом деле, уравнение (234) можно рассматривать как вековое для буквы λ, а тогда система уравнений (233) допускает, как мы знаем,

для всякого корня λ определителя (234) по крайней мере одно решение

$$x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_\mu^0,\ t^0,$$

нетождественное нулю. Это решение мы можем рассматривать в пространстве $\mathcal{E}$ измерений $\mu+1$ как вектор $V^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_\mu^0, t^0)$, лежащий на характеристической прямой L_λ. При этом мы знаем, что характеристические прямые $L_{\lambda'}$ и $L_{\lambda''}$, соответствующие двум существенно различным корням λ' и λ'' векового уравнения (234) сами, в свою очередь, строго различны. Поэтому не может быть никакой пропорциональности между решениями $x_1', x_2', \ldots, x_\mu', t'$ и $x_1'', x_2'', \ldots, x_\mu'', t''$ и, значит, обе найденных неподвижных точки $A(x_1' : x_2' : \ldots : x_\mu' : t')$ и $B(x_1'' : x_2'' : \ldots : x_\mu'' : t'')$ строго различны. Кроме того, из двух первых уравнений системы (233) следует, что $x_2' = 0$ и $x_1'' = 0$ и, значит, обе найденных точки A и B лежат на неподвижных гиперплоскостях $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Ясно, наконец, что если коллинеация (227) вещественна, то оба корня λ' и λ'', а с ними и обе точки A и B тоже вещественны.

Гипотеза 2: $a_{11} = a_{22}$, *но все остальные корни*

$$\lambda^{\mathrm{III}},\ \lambda^{\mathrm{IV}},\ \ldots,\ \lambda^{(\mu)},\ \lambda^{(\mu+1)}$$

определителя (234) отличны от первых двух корней $\lambda' = \lambda'' = a_{11} = a_{22}$. В этом случае мы имеем попрежнему две существенно-различные неподвижные точки A и B на неподвижных гиперплоскостях $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

В самом деле, в этом случае определитель

$$\begin{vmatrix} a_{33}-\lambda & a_{34} & \ldots & a_{3\mu} & b_3 \\ a_{43} & a_{44}-\lambda & \ldots & a_{4\mu} & b_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 3} & a_{\mu 4} & \ldots & a_{\mu\mu}-\lambda & b_\mu \\ c_3 & c_4 & \ldots & c_\mu & g-\lambda \end{vmatrix} \qquad (236)$$

полученный из определителя (234) отбрасыванием первых двух столбцов и первых двух строк, и имеющий, очевидно, своими корнями

$$\lambda^{\mathrm{III}},\ \lambda^{\mathrm{IV}},\ \ldots,\ \lambda^{(\mu)},\ \lambda^{(\mu+1)},$$

не уничтожается, когда мы полагаем $\lambda = \lambda' = \lambda'' = a_{11} = a_{22}$. Поэтому система $\mu - 1$ последних уравнений (233) разрешима, *при всяких* x_1^0 и x_2^0, относительно неизвестных $x_3^0, x_4^0, \ldots, x_\mu^0, t^0$.

Полагая сначала $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 0$, и потом $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 1$, и разрешая всякий раз указанную систему $\mu - 1$ последних уравнений (233) относительно неизвестных $x_3^0, x_4^0, \ldots, x_\mu^0, t^0$, мы получаем две различных неподвижных точки A и B.

Гипотеза 3: $a_{11} = a_{22}$ *и все первые миноры определителя* (236) *уничтожаются при* $\lambda = \lambda' = \lambda'' = a_{11} = a_{22}$. В этом случае мы имеем бесчисленное множество неподвижных точек на гиперплоскостях

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 0.$$

В самом деле, полагая одновременно $x_1^0 = 0$ и $x_2^0 = 0$, мы можем разрешить систему $\mu - 1$ последних уравнений (233) относительно

$$x_3^0, x_4^0, \ldots, x_\mu^0, t^0.$$

Так как все первые миноры определителя (236) суть нули при $\lambda = a_{11} = a_{22}$, то указанная система имеет по крайней мере *два независимых решения*, т. е. с непропорциональными количествами $x_3^0, x_4^0, \ldots, x_\mu^0, t^0$, что даст нам две, и, следовательно, бесчисленное множество неподвижных точек на пересечении гиперплоскостей $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

Остается рассмотреть последнюю гипотезу, приводящую к уже иному результату:

Гипотеза 4: $a_{11} = a_{22}$, *но не все первые миноры определителя* (236) *суть нули при* $\lambda = \lambda' = \lambda'' = a_{11} = a_{22}$. В этом случае мы можем утверждать только то, что *в пространстве* $\mathcal{E}$ (но, вообще, уже не на гиперплоскостях $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$) имеется бесчисленное множество неподвижных точек; на самих же этих гиперплоскостях может или совсем не быть двух неподвижных точек, или они могут оказаться *мнимыми*.

В самом деле, раз определитель (236) уничтожается при $\lambda = a_{11} = a_{22}$ (что мы заранее предполагаем), но не все первые миноры его суть нули, тогда одна его строка есть линейная комбинация остальных его строк. Для определенности, пусть, например, последняя его строка есть линейная комбинация $\mu - 2$ остальных его строк с численными множителями этой линейной комбинации

$$-h_3, h_4, \ldots, h_\mu.$$

В этом случае мы получим решение системы (233) тогда и только тогда, когда потребуем, чтобы эта же самая линейная комбинация имела силу и для сумм членов с x_1^0 и x_2^0, т. е. чтобы

$$c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 = h_3 (a_{31} x_1^0 + a_{32} x_2^0) + \cdots + h_\mu (a_{\mu 1} x_1^0 + a_{\mu 2} x_2^0)$$

или

$$(c_1 - h_3 a_{31} - \cdots - h_\mu a_{\mu 1}) x_1^0 + (c_2 - h_3 a_{32} - \cdots - h_\mu a_{\mu 2}) x_2^0 = 0. \quad (237)$$

Ясно, что система (233) становится разрешимой, если количества x_1^0 и x_2^0 будут связаны соотношением (237). Так как это соотношение есть *линейное* относительно однородных координат x_1^0 и x_2^0, то мы получаем в пространстве $\mathcal{E}$ *прямую линию*, состоящую сплошь из неподвижных точек. Эта прямая может пересекать гиперплоскости $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ лишь в *одной только* точке (которую получаем, полагая $x_1^0 = 0$ и $x_2^0 = 0$).

Коллинеация

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_1 - x_3 + x_4 + t \\ x_4' &= x_2 - x_3 \\ t' &= x_2 - 2x_3 + x_4 + 2t \end{aligned}\right\} \quad (235)$$

имеет на гиперплоскостях $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ лишь одну вещественную неподвижную точку $(0:0:-1:1:-3)$, происходящую от пересечения их прямою

$$(3\rho + \sigma : 3\rho + \sigma : 2\rho + \sigma : \rho : \sigma),$$

где ρ и σ суть независимые переменные, сплошь состоящие из неподвижных точек в рассматриваемом 4-мерном пространстве. Но на гиперплоскостях $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ имеются еще две *мнимые* неподвижные точки

$$(0:0:1:\sqrt{-1}:1) \quad \text{и} \quad (0:0:1:-\sqrt{-1}:1).$$

§ 18. Установив это, мы переходим к доказательству предложения о **единственности осевых многообразий** $E_1^{(i)}, E_2^{(i)}, \ldots E_{e_i}^{(i)}$ **для характеристической прямой** L_i.

Мы начинаем с утверждения, что не существует никакого другого осевого многообразия H *двух измерений*, содержащего L_i и отличного

от $E_2^{(i)}$. В самом деле, если бы имелось такое многообразие H, тогда мы обе плоскости: $E_2^{(i)}$ и H могли бы заключить в трехмерное пространство $\mathcal{E}'$, так как каждая из них содержит прямую L_i. Это трехмерное пространство $\mathcal{E}'$ находится в пространстве $\mathcal{E}$ и является, очевидно, характеристическим многообразием. Поэтому, всякая прямая Λ, проходящая чрез начало координат O и лежащая в $\mathcal{E}'$ преобразуется подстановкою A' в прямую Λ_1, также проходящую чрез O и лежащую в $\mathcal{E}'$. Пусть теперь Π есть какая-нибудь плоскость, находящаяся в $\mathcal{E}'$ и не содержащая начала координат O. Обозначим чрез $\underline{u}$ и $\underline{v}$ следы пересечения плоскости Π с плоскостями $E_2^{(i)}$ и H и чрез S и S' следы пересечения Π с прямыми Λ и Λ'. Ясно, что точки S и S' образуют на плоскости Π *коллинеацию*, причем прямые $\underline{u}$ и $\underline{v}$ суть *неподвижные прямые* для этой коллинеации. Ясно также, что всякая неподвижная точка P плоскости Π, будучи соединена с началом O прямою, дает характеристическую прямую OP, потому что подстановка A' оставляет, очевидно, неподвижной прямую OP.

Но тогда, вследствие доказанного выше предложения проективной геометрии, должны иметь либо две различных характеристических прямых, лежащих в плоскостях $E_2^{(i)}$ и H, либо бесчисленное множество характеристических прямых, принадлежащих пространству $\mathcal{E}'$. Но ни первое, ни второе заключения не приемлемы, так как, во-первых, многообразия $E_2^{(i)}$ и H суть *осевые* для L_i и, значит, L_i есть единственная характеристическая прямая, принадлежащая к ним; во-вторых же, в пространстве $\mathcal{E}$ и, значит, в $\mathcal{E}'$ может находиться лишь конечное число характеристических прямых, по условию рассматриваемого *случая II*.

Таким образом, $E_2^{(i)}$ есть единственное 2-мерное осевое многообразие, содержащее прямую L_i. (Ч. т. д.)

Предположим теперь, что доказана единственность осевых многообразий $E_1^{(i)}, E_2^{(i)}, \ldots, E_\nu^{(i)}$, где $\nu < e_i$, и докажем, что осевое многообразие $E_{\nu+1}^{(i)}$ также есть единственное.

Доказательство поведем от противного: пусть имеется еще второе осевое многообразие H измерения $\nu + 1$, содержащее L_i и нетождественное с $E_{\nu+1}^{(i)}$. Мы начинаем с утверждения, что минимальное евклидово многообразие $\mathcal{E}'$, содержащее $E_{\nu+1}^{(i)}$ и H, имеет своим измерением

$$\nu + 2.$$

Действительно, многообразие H можно рассматривать как самостоятельное евклидово пространство измерения $\nu + 1$, подвергнутое преобразованию само в себя подстановкою A'. Если мы поместим оси координат

в H и затем преобразуем A' в приведенную форму $A^{*'}$, то легко заметим, что многообразие H содержит ν осевых многообразий

$$H_1 < H_2 < H_3 < \cdots < H_\nu, \tag{236}$$

вложенных одно в другое и измерений, соответственно равных $1, 2, 3 \ldots, \nu$. Чтобы видеть это, достаточно отметить, что многообразие H, будучи осевым, содержит единственную характеристическую прямую L_i и, имея своим измерением $\nu + 1$, принуждает $A^{*'}$ изобразиться в виде одной частной матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_i & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \;\; 1 & \lambda_i \end{matrix} \right\| \tag{237}$$

с $\nu + 1$ строками и столбцами. Но мы уже знаем (§ 16), что матрица такого рода определяет $\nu + 1$ осевых многообразий, вложенных одно в другое, причисляя к ним и само пространство H.

С другой стороны, мы предположили единственность осевых многообразий вплоть до ν-ого измерения. Следовательно, многообразие H_ν должно быть тождественным с $E_\nu^{(i)}$.

Таким образом, мы заключаем, что многообразия $E_{\nu+1}^{(i)}$ и H пересекаются по многообразию $E_\nu^{(i)}$ ν-ого измерения. А так как сами они имеют своим измерением $\nu + 1$, то отсюда вытекает, что оба они содержатся в минимальном евклидовом многообразии $\mathcal{E}'$ измерения $\nu + 2$.

Это минимальное многообразие $\mathcal{E}'$ есть, очевидно, *характеристическое*. Но тогда мы находимся сейчас в тех же самых условиях, какие имели раньше, при доказательстве единственности 2-мерного осевого многообразия. И так как вспомогательное предложение проективной геометрии (§ 17) приложимо в равной мере и здесь, то все сделанные выше рассуждения для 2-мерных осевых многообразий продолжают сохранять силу и здесь. Это замечание и оканчивает доказательство предложения единственности осевых многообразий. (Ч. т. д.)

Чтобы доказанная теорема о единственности получила полное завершение, остается лишь доказать, что не существует никакого осевого многообразия H, содержащего в себе осевое многообразие $E_{e_i}^{(i)}$ и нетождественного с ним.

Для этого обозначим чрез $H^{(i)}$ наибольшее осевое многообразие, содержащее прямую L_i; пусть $H^{(i)}$ имеет своим измерением μ_i. Так как $H^{(i)}$ содержит $E^{(i)}_{e_i}$, мы необходимо имеем

$$\mu_i \geqslant e_i. \tag{238}$$

Но многообразия $H^{(i)} (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$ не имеют общих точек попарно, исключая начала координат O. Поэтому, всякое евклидово многообразие, содержащее все многообразия $H^{(i)} (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$, необходимо имеет своим измерением число, не меньшее суммы $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m$. И так как пространство $\mathcal{E}$, измерение которого равно k, содержит все $H^{(i)}$, то необходимо имеем

$$k \geqslant \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_m. \tag{239}$$

Но, с другой стороны, имеем

$$k = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_m.$$

Это равенство согласуется с соотношениями (239) и (238) лишь тогда, когда имеем

$$\mu_1 = e_1, \ \mu_2 = e_2, \ \mu_3 = e_3, \ \ldots, \ \mu_m = e_m. \tag{240}$$

А это и доказывает, что *максимальным осевым многообразием, содержащим L_i, является $E^{(i)}_{e_i}$*. (Ч. т. д.)

§ **19.** Доказанное предложение позволяет установить строение *всякого* характеристического многообразия H в случае II, когда перемещающий множитель M не тождественен нулю.

В самом деле, пусть H есть какое-нибудь характеристическое многообразие $\varkappa$ измерений, лежащее в пространстве $\mathcal{E}$.

Рассмотрим H как самостоятельное пространство, в котором имеем аффинное преобразование A'. Ясно, что в H нет двух различных характеристических прямых L_λ и $L_{\lambda'}$ с равными модулями сдвига $\lambda = \lambda'$, потому что H является частью пространства $\mathcal{E}$, для которого рассматривается случай II.

Таким образом, в пространстве H также имеет место случай II и, значит, в H мы имеем ограниченное число (пусть μ) характеристических прямых $L_1, L_2, \ldots, L_\mu$, каждой из которых соответствует ряд осевых многообразий. Пусть характеристической прямой L_i соответствуют в H осевые многообразия $E_1^{(i)} < E_2^{(i)} < \ldots < E^{(i)}_{\eta_i}$, где η_i есть число измерений мак-

симального осевого многообразия для L_i, содержащегося в H. Согласно предыдущему, мы должны иметь

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots + \eta_\mu = \varkappa. \tag{241}$$

Но в силу теоремы единственности осевых многообразий, осевые многообразия $E_1^{(i)}$, $E_2^{(i)}$, ..., $E_{\eta_i}^{(i)}$ для «малого» пространства H, являясь осевыми многообразиями и для целого пространства $\mathcal{E}$, образуют лишь начало полного ряда

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГИДРО- И АЭРОДИНАМИКИ

Д. А. ГРАВЕ

(Представлено академиком А. Н. Крыловым)

1. Очень общий способ описания движения жидкости, рассматривая ее как материю молекулярного строения, состоял бы в установлении дифференциальных уравнений движения каждой определенной молекулы. Но не говоря уже о том, что междумолекулярные силы нам неизвестны, мы были бы даже при знании этих сил далеки от возможности решить задачу в общем виде. Стоит вспомнить задачу трех тел.

Против молекулярной теории движения жидкостей говорят более практические соображения. На практике требуется знать не движение отдельных частиц жидкости, а как движется жидкость как целое, т. е., как движутся такие ее части, которые состоят из большого числа молекул, какие скорости и ускорения встречаются, какие плотности и температуры жидкость имеет в различных своих частях. Одним словом, дело идет не о кинетическом состоянии самих молекул, а о пространственных и временных средних значениях.

Этим соображениям молекулярного строения противопоставлялось уже с XVIII столетия рассмотрение жидкости, как непрерывно заполняющего пространство континуума. Этот новый взгляд дал возможность Эйлеру написать дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости, которые Лагранж связал формально с общими законами механики Ньютона.

Но уже в то время обнаружился характерный факт преимущества теории молекулярного строения. Ньютон вывел общеизвестный из практики закон сопротивления жидкости движущимся в ней телам, пропорциональный квадрату скорости, при помощи самых простых соображений, предполагая жидкость тучею отдельных частиц.

Его вывод такой. Согласно классическому принципу относительности можно предполагать, что тело находится в покое, а жидкость сплошным потоком на него падает. Тогда частицы жидкости подобно мячам игры в теннис ударяются о твердое тело и отскакивают назад.

Обозначая через ρ плотность жидкости, т. е. число молекул в единице объема, получим массу воды, ударяющейся о тело $Q\rho v$, где Q площадь профиля тела в направлении потока, а v скорость. Сила удара будет равна массе, умноженной на ускорение, т. е., изменение скорости частицы за время удара. При совершенно упругом ударе это изменение скорости будет $2v$, а при совершенно неупругом, когда скорость сводится к нулю, будет v. Таким образом сила удара будет $2Q\rho v^2$ или $Q\rho v^2$ и закон пропорциональности квадрату скорости установлен.

В последнее время против способа вывода Ньютона делаются возражения, что этот способ не принимает в расчет заднюю часть движущегося в жидкости тела, тогда как на основании опытов последнего времени эта часть имеет большое влияние на сопротивление. Мне кажется, что при воздухе, если принять кинетическую теорию газов, можно до некоторой степени снять это возражение.

В самом деле, при неподвижном теле, частицы газа ударяются в его поверхность со всех сторон, причем их давление сводится к нулю на основании формулы Гаусса $\int \frac{dV}{d\nu} d\sigma = 0$. Если тело начинает движение, то импульс ударов на передней части возрастает, а на задней убывает и таким образом можно принять в расчет заднюю часть тела.

2. В вопросе о сопротивлении жидкости движению тел теория непрерывного строения жидкости имела с самого начала серьезный неуспех. Из уравнений Эйлера вышло, что идеальная жидкость не должна оказывать сопротивления движению тел. Этот вывод, противоречащий повседневному опыту, носит название парадокса Эйлера. С тех пор в продолжение почти двухсот лет гидродинамика борется со средним успехом с различными несогласиями с опытом. Между прочим новый парадоксальный факт получился из теории вихрей, данной Гельмгольцем. Я имею в виду вечность вихрей и неизменность их моментов.

Все это вместе взятое заставило в последнее время серьезно обсуждать вопрос, насколько схема континуума подходит к изучению действительных жидкостей.

Для того чтобы подойти к обсуждению этого вопроса возьмем какой-либо гидродинамический фактор, важный в практическом отношении,

а именно, рассмотрим понятие о плотности жидкости. Если мы возьмем некоторый объем V жидкости и через M назовем сумму масс молекул, находящихся в этом объеме, то отношение

$$\frac{M}{V} \tag{1}$$

можно назвать среднею плотностью данного объема. Под плотностью в некоторой точке жидкости придется разуметь предел (1), когда объем V стягивается в рассматриваемую точку. Встает вопрос о существовании такого предела. Если стоять на ригористическом определении предела, как он дается в чистой математике, то такого предела для величины (1) на самом деле существовать не должно и понятие о плотности падает. В самом деле, если мы будем стягивать объем V в точку, соответствующую пустому пространству между молекулами, то при достаточной малости объема V в него не будет входить ни одна молекула и плотность должна равняться нулю. Значит в этом случае предел (1) равен нулю. Если же мы будем стягивать объем вокруг одной из молекул, то наступит момент, когда внутри объема будет все время находиться только одна молекула. Значит числитель M будет постоянным, а знаменатель уменьшится до нуля и предел будет равняться бесконечности.

3. Выходом из этого положения, если мы желаем сохранить понятие о плотности, должны быть иные взгляды на понятие о пределе, понятие, отступающее от чисто математического и имеющее характер, если так можно выразиться, физический.

В настоящее время вводится понятие о так называемой физической точке.* Для того чтобы выяснить это понятие, возьмем некоторый конкретный пример. При нормальном давлении воздух заключает $2.7 \cdot 10^{19}$ молекул в кубическом сантиметре. Возьмем объем воздуха, равный 10^{-12} кубического сантиметра. Сторона последнего кубика будет равна $\frac{1}{1000}$ миллиметра. При этих микроскопических размерах кубик можно рассматривать как «физическую точку». В нем будет $2.7 \cdot 10^{7}$ молекул, т. е. еще настолько большое число молекул, при котором можно считать допустимым составление предельного понятия о плотности.

Обстоятельства изменятся, если исследовать газы под очень малым давлением, другими словами, явления в искусственно вызванной пустоте (Hochwakuum). Тут могут случиться настолько большие средние расстояния

* Prandtl-Tietjens. Hydro-und Aeromechanik. 1929, 1. B., S. 7.

между молекулами, что размеры нашего малого кубика сделаются сравнимыми с расстояниями между молекулами, и понятие о плотности газа в точке потеряет свой смысл.

Итак, мы видим, что все зависит от размеров принимаемой нами физической точки. С этими размерами должны быть сравнимы величины дифференциалов нашей математической теории.

Размеры физической точки мы должны считать **физическим нулем**. К этому нулю надо приближать вводимые в вычисление дифференциалы. Их не следует уменьшать за пределы физического нуля.

Таким образом мы приходим к понятию о **физических дифференциалах**. Резюмируя сказанное, мы видим, что в гидродинамике не имеет значения абсолютная малость какой-нибудь величины. Тут дело идет об относительной малости. Размеры физической точки надо координировать, как было уже указано, с расстояниями между молекулами. Но во всяком случае выбранная нами физическая точка должна быть мала по отношению к средним расстояниям конкретной рассматриваемой нами задачи. Например, по отношению к размерам аэропланного крыла, или к размерам лопаток турбины.

4. При рассмотрении понятия о плотности мы не принимаем во внимание движения молекул, так что мы предполагали, что всякий малый объем V состоит все время из тех же молекул, т. е. он мог бы быть принят за физический индивидуум. Если принять во внимание движение молекул, то объем V может перестать быть физическим индивидуумом, так как в этот объем могут входить новые молекулы, а прежние уходить из него. Если однако размеры V велики по отношению к длине пути молекулы, то на малых промежутках времени можно объем V всетаки считать за физический индивидуум, если не обращать внимания на малый обмен молекулами на границах объема.

Мы видим, что при длинном промежутке времени движением молекул нельзя пренебрегать даже при больших размерах объема. Это обстоятельство встречается при явлениях **диффузии**, при которых происходит перенос материи в жидкости.

Все что мы говорили о плотности относится и к другим понятиям гидродинамики. Например, вязкость или внутреннее трение является обменом импульса при скольжении одного слоя жидкости мимо другого.

Подобным же образом факт теплопроводности есть молекулярный обмен кинетической энергии. Мы видим, что сравнение непрерывной структуры жидкости с молекулярной зависит от длин и скоростей движения. В тех

случаях, когда при решении конкретных задач возможно бывает признать жидкость за заполненную массой непрерывно, можно бывает изучать свойства покоя и движения ее при помощи дифференциальных уравнений.

Когда это невозможно, приходится говорить о квази-непрерывной структуре жидкости (quasi-continuum).

Важно заметить, что идеальная жидкость является квази-континуумом, если потребовать сохранения всех частей ее теории.*

5. Гидро- и аэромеханика изучает тела следующих трех категорий: вязкие жидкости, тонкие жидкости и газообразные тела. К вязким жидкостям принадлежат сиропы, глицерин, масла, к тонким — вода, спирт, эфир.

Не существует определенно выраженной границы между этими тремя категориями. Вязкие жидкости отличаются от тонких наличием вязкости или внутреннего трения. Но на самом деле все тела, включая и третью категорию газов, имеют хотя и малую, но все-таки вязкость. Жидкость без вязкости не существует. Уменьшая вязкость до нуля, мы приходим к идеальной несуществующей в природе жидкости. К этой жидкости и относятся дифференциальные уравнения Эйлера.

Газы отличаются от других жидкостей (капельных) свойством сжимаемости. Капельная жидкость оказывает громадное сопротивление уменьшению плотности, связанному с внешним давлением, так что жидкости при умеренных давлениях являются практически несжимаемыми. Наоборот, газы сжимаются при сравнительно небольших давлениях. В случае же, когда изменения давления остаются настолько малыми, что можно пренебречь изменениями плотности, то газы и тонкие жидкости подчиняются одинаковым законам движения.

Причины большого изменения объемов газов могут быть двоякие. Изменения объема могут быть или обусловлены очень большими скоростями, или же они могут происходить от разницы давлений, как например, при изменении высоты в атмосфере. В первом случае, как например, при полете снарядов дело идет о соображениях, которые относятся к динамике газов, во втором случае дело идет о динамической метеорологии.

Как должен относиться математик к изложенным соображениям, если он не желает быть оторванным от действительности?

Прежде всего надо обратить внимание, что существует непрерывный переход в обратную сторону от вязких жидкостей к упругим твердым телам.

* Prandtl-Tietjens, ibidem, S. 91.

В настоящее время существуют три различные математические схемы: схема упругого твердого тела, схема вязкой жидкости и схема идеальной жидкости. Мы здесь не говорим о мелких видоизменениях и подразделениях этих схем.

При существовании непрерывного перехода от упругих твердых тел к газам является вопрос: какую из трех указанных схем надо применить к данному конкретному случаю физического тела.

С первого взгляда может как-будто показаться, что ответ дают методы гидравлики, а именно дело как-будто сводится к рассмотрению коэффициентов, находимых опытным путем.

На самом деле вопрос гораздо труднее. Дело в том, что одно и то же физическое тело при совершенно одинаковых физических условиях (температуры, давления и т. д.) может быть совершенно законно подводимо под разные схемы. Например, асфальт в обыкновенной речи считается конечно твердым телом, но он несмотря на это в известных случаях (даже при обыкновенной температуре) имеет характер также вязкой жидкости. Все дело сводится к скорости деформации. Если мы разбиваем асфальт молотком на куски, то его можно считать твердым телом. Скорость деформации в этом случае очень велика. Если мы оставим асфальт в открытой бочке с боковым отверстием внизу на долгое время, предоставив его действию собственного веса, то он (даже при той самой температуре, при которой он разбивается на куски) постепенно потечет из бочки, как очень вязкая жидкость. В этом случае скорость деформации очень мала. Подобным же образом горные ледники текут как реки, хотя состоят из твердого льда.

Не нужно думать, что это относится только к очень вязким телам. Необходимо обратить внимание на деятельность В. Томсона, который имел идею считать эфир междупланетного пространства идеальною жидкостью. Томсон думал, что вечные вихри идеальной жидкости можно при эфире считать атомами материи. Он должен был вскоре рассматривать эфир как твердое тело. К такой точке зрения Томсона принудили поперечные колебания световых волн. Чтобы оправдать, что эфир в его теории является и как жидкость и как твердое тело, Томсон излагает такой опыт. Он берет горизонтальную пленку вещества, подобного асфальту, и кладет на нее пулю. Оставляя пулю долгое время лежать на пластинке, Томсон замечает, что пуля под влиянием своего веса прошла через вещество пластинки, которое подобно вязкой жидкости, пропустив через себя пулю, снова закрыло отверстие.

Максвелл в своей теории электричества берет также аналогии как из гидродинамики, так и из теории упругости.

6. Из всего сказанного вытекает необходимость установить общую механику деформируемых тел, из которой далее следовали бы указанные выше схемы, как частные случаи.

Современная механика деформируемых тел исходит из предположения непрерывного строения вещества. Она резюмируется в сопоставлении двух тензоров: тензора деформации и тензора напряжений. Так как зависимость между этими двумя тензорами наиболее рельефно выступает в теории упругости, то поэтому мы встречаем обычно механику деформируемых тел при изложении теории упругости.

В схеме вязкой жидкости играет роль не зависимость между указанными тензорами, а зависимость тензора напряжений от изменений по времени тензора деформации. В схеме идеальной жидкости зависимость между тензорами отступает на второй план.

Каждый из двух указанных тензоров является физическим понятием, доступным как для математической обработки, так и для экспериментальных исследований.

7. Чтобы проще выяснить понятие о тензоре, начнем с одного конкретного случая.

Рассмотрим два произвольных вектора

$$\mathfrak{A}(A_x, A_y, A_z), \quad \mathfrak{B}(B_x, B_y, B_z),$$

составляющие которых отнесены к определенной системе координат (x, y, z). Составим матрицу девяти величин.

$$\begin{array}{lll} E_{xx}=A_x B_x, & E_{xy}=A_x B_y, & E_{xz}=A_x B_z \\ E_{yx}=A_y B_x, & E_{yy}=A_y B_y, & E_{yz}=A_y B_z \\ E_{zx}=A_z B_x, & E_{zy}=A_z B_y, & E_{zz}=A_z B_z. \end{array} \tag{1}$$

Система этих девяти чисел $E_{xx}, E_{xy}, \ldots$ обладает рядом важных свойств относительно преобразования координат

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \tag{2}$$

где обе системы прямоугольные.

I. Сумма диагональных элементов

$$E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}$$

будучи скалярным произведением $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ есть инвариант преобразования координат.

II. Величины

$$E_{yz} - E_{zy}, \quad E_{zx} - E_{xz}, \quad E_{xy} - E_{yx}$$

будут составляющие векториального произведения $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, которое является вектором в пространстве, независимым от выбора системы координат.

III. Если мы возьмем новый вектор

$$\mathfrak{D}(D_x, D_y, D_z)$$

то будет

$$(3) \qquad \begin{aligned} E_{xx} D_x + E_{xy} D_y + E_{xz} D_z &= A_x (\mathfrak{B}\mathfrak{D}) \\ E_{yx} D_x + E_{yy} D_y + E_{yz} D_z &= A_y (\mathfrak{B}\mathfrak{D}) \\ E_{zx} D_x + E_{zy} D_y + E_{zz} D_z &= A_z (\mathfrak{B}\mathfrak{D}). \end{aligned}$$

Равенства (3) равносильны существованию некоторого афинного преобразования

$$(4) \qquad \begin{aligned} x_1 &= E_{xx} x + E_{xy} y + E_{xz} z \\ y_1 &= E_{yx} x + E_{yy} y + E_{yz} z \\ z_1 &= E_{zx} x + E_{zy} y + E_{zz} z. \end{aligned}$$

IV. Преобразование величин $E_{xx}, \ldots$ к новой системе координат x', y', z' (2) совершается по формулам

$$(5) \qquad \begin{aligned} E'_{xx} = A'_x B'_x &= (A_x \alpha_1 + A_y \beta_1 + A_z \gamma_1)(B_x \alpha_1 + B_y \beta_1 + B_z \gamma_1) = \\ &= E_{xx} \alpha_1^2 + E_{yy} \beta_1^2 + E_{zz} \gamma_1^2 + (E_{yz} + E_{zy}) \beta_1 \gamma_1 + \\ &+ (E_{zx} + E_{xz}) \gamma_1 \alpha_1 + (E_{xy} + E_{yx}) \alpha_1 \beta_1. \end{aligned}$$

Подобным же образом

$$(6) \qquad \begin{aligned} E'_{xy} = A'_x B'_y &= (A_x \alpha_1 + A_y \beta_1 + A_z \gamma_1)(B_x \alpha_2 + B_y \beta_2 + B_z \gamma_2) = \\ &= \alpha_1 \alpha_2 E_{xx} + \beta_1 \beta_2 E_{yy} + \gamma_1 \gamma_2 E_{zz} + \cdots \end{aligned}$$

Матрица (1), обладающая всеми приведенными свойствами, определяет некоторое геометрическое понятие, называемое тензором.

Мы дадим в следующем параграфе общее понятие о тензоре. Тензор (1) есть один из частных случаев, на который обратил внимание Gibbs.

8. Общее понятие о тензоре дает матрица

$$(1) \qquad \begin{Vmatrix} E_{xx}, & E_{xy}, & E_{xz} \\ E_{yx}, & E_{yy}, & E_{yz} \\ E_{zx}, & E_{zy}, & E_{zz} \end{Vmatrix}$$

если она удовлетворяет относительно преобразования координат всем свойствам матрицы Gibbs'a.

Нетрудно убедиться, что основным свойством матрицы (1), определяющим тензор, является возможность существования афинного преобразования (4) § 7.

Итак, мы предположим, что существует преобразование

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= E_{xx} x + E_{xy} y + E_{xz} z \\ y_1 &= E_{yx} x + E_{yy} y + E_{yz} z \\ z_1 &= E_{zx} x + E_{zy} y + E_{zz} z. \end{aligned}$$

Как надо понимать это существование? Конечно при всяких значениях координат x, y, z в левых частях будут какие то значения x_1, y_1, z_1. Я понимаю существование равенств (2) не в этом тривиальном значении слова. Существование надо понимать в том смысле, что равенства (2) физически связаны с нашим тензором, а именно обе системы чисел (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1) соответствуют двум физическим точкам, а потому они при преобразовании координат должны подвергаться одному и тому же преобразованию (2) § 7. После этого преобразования должны получаться равенства

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1' &= E'_{xx} x' + E'_{xy} y' + E'_{xz} z' \\ y_1' &= E'_{yx} x' + E'_{yy} y' + E'_{yz} z' \\ z_1' &= E'_{zx} x' + E'_{zy} y' + E'_{zz} z', \end{aligned}$$

коэффициенты которых суть новые значения составляющих тензора при новых координатах.

Простая проверка покажет, что установление равенств (2) и (3) дает закон преобразования коэффициентов E_{xx}, ... как раз такой, при котором все свойства этих коэффициентов, требуемые для определения тензора, удовлетворяются.

Между прочим мы получаем

$$(4)\quad \begin{aligned} E'_{yz}-E'_{zy}&=\alpha_1(E_{yz}-E_{zy})+\beta_1(E_{zx}-E_{xz})+\gamma_1(E_{xy}-E_{yx})\\ E'_{zx}-E'_{xz}&=\alpha_2(E_{yz}-E_{zy})+\beta_2(E_{zx}-E_{xz})+\gamma_2(E_{xy}-E_{yx})\\ E'_{xy}-E'_{yx}&=\alpha_3(E_{yz}-E_{zy})+\beta_3(E_{zx}-E_{xz})+\gamma_3(E_{xy}-E_{yx}).\end{aligned}$$

Отсюда мы видим, что, если будут существовать равенства

$$E_{yz}-E_{zy}=0,\quad E_{zx}-E_{xz}=0,\quad E_{xy}-E_{yx}=0$$

при одной какой-нибудь системе координат, то подобные же равенства будут существовать и при всякой другой

$$E'_{yz}-E'_{zy}=0,\quad E'_{zx}-E'_{xz}=0,\quad E'_{xy}-E'_{yx}=0,$$

т. е. симметричность матрицы тензора не зависит от системы координат, другими словами, эта симметричность есть свойство самого тензора. Тензор с симметричной матрицей называется симметричным тензором.

9. Если определитель

$$\Theta=\begin{vmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz}\\ E_{yx} & E_{yy} & E_{yz}\\ E_{zx} & E_{zy} & E_{zz}\end{vmatrix}$$

не равен нулю, то тензор мы будем называть неособенным. Тензор Gibbs'а очевидно особенный, ибо для него определитель равен нулю.

Покажем, что неособенность тензора есть свойство самого тензора, не зависящее от системы координат. Для этой цели найдем для тензора его инварианты преобразования координат.

Так как тензор есть физический пространственный образ, не зависящий от выбора координатных осей, то рассмотрим инварианты при произвольном косоугольном преобразовании координат. Имея в виду механические приложения, ограничимся рассмотрением симметрического тензора.

Рассмотрим поверхность второго порядка

$$(1)\quad E_{xx}x^2+E_{yy}y^2+E_{zz}z^2+2E_{yz}yz+2E_{zx}zx+2E_{xy}xy=\text{const}.$$

Нетрудно видеть, что эта поверхность может рассматриваться как физический образ, связанный с тензором. Для этого достаточно показать, что при преобразовании координат (2) § 7 поверхность принимает вид

$$(2)\quad \begin{gathered} E'_{xx}x'^2+E'_{yy}y'^2+E'_{zz}z'^2+2E'_{yz}y'z'+ \\ +2E'_{zx}z'x'+2E'_{xy}x'y'=\text{const}, \end{gathered}$$

где постоянная во второй части уравнения не изменяется, а новые коэффициенты E'_{xx}, E'_{yy}, ... суть как раз те значения составляющих E_{xx}, E_{yy}, ..., которые должны соответствовать новым координатам (см. (5) и (6) § 7).

Поверхность второго порядка (1) принадлежит тензору физически и характеризует его свойства. Эту поверхность мы будем называть квадрика тензора.

В виду физической независимости от осей координат существования квадрики мы можем ее подвергнуть исследованию при самой общей косоугольной системе.

Возьмем произвольную систему координат, причем угол между осями y и z назовем через φ, угол между z и x через ψ, а угол между x и y через ω.

Пусть уравнение квадрики при этой системе координат имеет внешний вид

$$E_{xx}x^2+E_{yy}y^2+\cdots=\text{const}.$$

Сделаем преобразование координат, причем перейдем к новой системе координат (также косоугольной) с углами φ', ψ', ω' и тем же началом.

Мы будем иметь равенство

$$(3)\quad \begin{gathered} E_{xx}x^2+E_{yy}y^2+E_{zz}z^2+2E_{yz}yz+2E_{zx}zx+2E_{xy}xy= \\ =E'_{xx}x'^2+E'_{yy}y'^2+E'_{zz}z'^2+2E'_{yz}y'z'+ \\ +2E'_{zx}z'x'+2E'_{xy}x'y' \end{gathered}$$

которое тождественно удовлетворяется на основании формул преобразования координат.

Так как квадрат расстояния точки от начала координат не меняется то мы получаем равенство

$$(4)\qquad \begin{aligned} &x^2+y^2+z^2+2\cos\varphi yz+2\cos\psi zx+2\cos\omega xy=\\ &=x'^2+y'^2+z'^2+2\cos\varphi' y' z'+2\cos\psi' z' x'+2\cos\omega' x' y'. \end{aligned}$$

Умножая уравнение (4) на ρ и вычитая из уравнения (3), получим

$$(5)\qquad \begin{aligned} (E_{xx}-\rho)x^2+(E_{yy}-\rho)y^2+(E_{zz}-\rho)z^2&+2(E_{yz}-\rho\cos\varphi)yz\\ &+2(E_{zx}-\rho\cos\psi)zx\\ &+2(E_{xy}-\rho\cos\omega)xy=\\ =(E'_{xx}-\rho)x'^2+(E'_{yy}-\rho)y'^2+\cdots \end{aligned}$$

Подберем ρ так, чтобы первая часть уравнения (5) раскладывалась на два линейных множителя. Для этой цели необходимо, чтобы ρ удовлетворяло уравнению

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} E_{xx}-\rho, & E_{xy}-\rho\cos\omega, & E_{xz}-\rho\cos\psi \\ E_{yx}-\rho\cos\omega, & E_{yy}-\rho, & E_{yz}-\rho\cos\varphi \\ E_{zx}-\rho\cos\psi, & E_{zy}-\rho\cos\varphi, & E_{zz}-\rho \end{vmatrix}=0.$$

Обозначив через Δ определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\psi \\ \cos\omega & 1 & \cos\varphi \\ \cos\psi & \cos\varphi & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=4\sin\frac{\varphi+\psi+\omega}{2}\sin\frac{\psi+\omega-\varphi}{2}\sin\frac{\omega+\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi-\omega}{2}.$$

Этот определитель имеет численное значение, отличное от нуля и не превосходящее 1.

Если мы раскроем кубическое уравнение (6), то получим

$$(7)\qquad \rho^3-\Omega_1\rho^2+\Omega_2\rho-\Omega_3=0.$$

Коэффициенты его суть, очевидно, инварианты преобразования координат, ибо при корнях этого уравнения вторая часть равенства (5) раскладывается также на произведение двух линейных множителей.

Мы получаем

$$\Omega_1 = \frac{1}{\Delta} V; \quad \Omega_2 = \frac{1}{\Delta} U, \quad \Omega_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{yx} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{zx} & E_{zy} & E_{zz} \end{vmatrix}$$

где

$$V = E_{xx} \sin^2 \varphi + E_{yy} \sin^2 \psi + E_{zz} \sin \omega +$$
$$+ 2E_{yz} (\cos \omega \cos \psi - \cos \varphi) + 2E_{zx} (\cos \varphi \cos \omega - \cos \psi) +$$
$$+ 2E_{xy} (\cos \varphi \cos \psi - \cos \omega)$$

$$U = E_{xx} E_{yy} + E_{xx} E_{zz} + E_{yy} E_{zz} - E^2{}_{xy} - E^2{}_{zx} - E^2{}_{yz} +$$
$$+ 2 \cos \varphi (E_{xy} E_{xz} - E_{xx} E_{yz})$$
$$+ 2 \cos \psi (E_{yz} E_{yx} - E_{yy} E_{zx})$$
$$+ 2 \cos \omega (E_{zx} E_{zy} - E_{zz} E_{xy}).$$

10. Кубическое уравнение (6) имеет всегда три вещественных корня, что следует из известных теорем алгебры, или еще проще, из геометрических соображений, относящихся к нахождению осей квадрики тензора.

В 1915 г. я изложил студентам полную теорию поверхностей второго порядка, рассматривая самый общий случай косоугольных координат и применяя инварианты, указанные в предыдущем параграфе. Изложение получилось очень наглядное и не длиннее обычного, причем при рассмотрении случаев, когда инварианты обращаются в нуль, пришлось ввести новое понятие о производном инварианте с применением правила подобного правилу Лопиталя раскрытия неопределенностей. Эта теория мною была студентам продиктована. Надеюсь ее опубликовать при подходящем случае.

11. Так как при механических приложениях оси координат играют второстепенную роль, то в дальнейшем ограничимся случаем прямоугольной системы координат

$$\cos \varphi = 0, \quad \cos \psi = 0, \quad \cos \omega = 0, \quad \Delta = 1.$$

Основной задачей является нахождение осей квадрики тензора.

Если обозначить через a, b, c углы одной из осей с осями координат, то мы по известным соображениям аналитической геометрии получим

$$
\begin{aligned}
&(E_{xx}-\rho)\cos a+E_{xy}\cos b+E_{xz}\cos c=0\\
(1)\qquad &E_{yx}\cos a+(E_{yy}-\rho)\cos b+E_{yz}\cos c=0\\
&E_{zx}\cos a+E_{zy}\cos b+(E_{zz}-\rho)\cos c=0,
\end{aligned}
$$

где под ρ надо разуметь один из корней кубического уравнения (6) § 9.

Кроме квадрики можно рассматривать еще другую поверхность второго порядка — эллипсоид тензора. Это тот эллипсоид, в который обращается шар

$$x^2+y^2+z^2=l^2$$

при афинном преобразовании (2) § 8.

Нетрудно заметить, что квадрика и эллипсоид имеют общий трехгранный угол осей. Направления осей квадрики носят название главных направлений тензора.

Мы замечаем, что неособенность тензора есть его свойство, не зависящее от системы координат; ибо определитель Θ § 9 не будет равняться нулю ни при какой системе координат, если он не равен нулю при какой-нибудь определенной. Только при неособенном тензоре существует его эллипсоид.

Покажем на примерах нахождение главных направлений тензора.

I. Требуется найти главные направления тензора

$$
\begin{matrix}
1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1
\end{matrix}
$$

заданного при косоугольной системе координат, когда

$$\cos\varphi=\cos\psi=\cos\omega=a<1.$$

Кубическое уравнение будет

$$
\begin{vmatrix}
1-\rho, & -\rho a, & -\rho a\\
-\rho a, & 1-\rho, & -\rho a\\
-\rho a, & -\rho a, & 1-\rho
\end{vmatrix}=0,
$$

его корни будут

$$\frac{1}{1+2a}, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{1}{1-a}.$$

Квадрика будет эллипсоид вращения.

II. Найти главные направления тензора

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

при тех же углах между осями координат.

Кубическое уравнение будет

$$\begin{vmatrix} -\rho, & 1-\rho a, & 1-\rho a \\ 1-\rho a, & -\rho, & 1-\rho a \\ 1-\rho a, & 1-\rho a, & -\rho \end{vmatrix} = 0$$

его корни суть

$$\frac{2}{1+2a}, \quad -\frac{1}{1-a}, \quad -\frac{1}{1-a}$$

квадрика будет гиперболоид вращения.

12. Обратимся теперь к рассмотрению двух конкретных тензоров механики диформируемых тел.

Рассмотрение упругих сил около какой-либо точки тела приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} X_\nu &= X_x \cos(\nu x) + X_y \cos(\nu y) + X_z \cos(\nu z) \\ Y_\nu &= Y_x \cos(\nu x) + Y_y \cos(\nu y) + Y_z \cos(\nu z) \\ Z_\nu &= Z_x \cos(\nu x) + Z_y \cos(\nu y) + Z_z \cos(\nu z). \end{aligned} \tag{1}$$

Вывод этих уравнений можно найти во всяком учебнике теории упругости.* Эти уравнения на основании § 8 определяют тензор.

* Д. Граве. Теоретична маханіка на основі техніки. 2 изд. 1932, стр. 154, изд. на русск. яз., 1932, стр. 172.

Здесь X_ν, Y_ν, Z_ν суть составляющие на осях координат силы напряжения на площадку, перпендикулярную к направлению ν. Подобным же образом

$$(X_x, Y_x, Z_x), \quad (X_y, Y_y, Z_y), \quad (X_z, Y_z, Z_z)$$

суть силы, когда направление ν совпадает с направлениями осей координат.

Уравнения (1) получаются от применения уравнений равенства нулю главного вектора для равновесия деформируемого тела.

Уравнения моментов приводят к тому, что тензор

$$\begin{Vmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{Vmatrix}$$

оказывается симметричным.

Применяя принцип Даламбера, придем к дифференциальным уравнениям движения деформируемого тела

$$\begin{aligned} \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right)\rho &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right)\rho &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \qquad (2) \\ \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right)\rho &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

где ρ плотность тела в рассматриваемой точке, а (X, Y, Z) составляющие объемных сил.

Уравнения (2) суть общие дифференциальные уравнения движения деформируемого тела, справедливые во всех случаях. При идеальных жидкостях они дают уравнения Эйлера, а при вязких — уравнения Навье-Стокса.

13. Что касается тензора деформации, то можно ограничиться бесконечно малыми деформациями

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ y_1 &= b_1 x + b_2 y + b_3 z \qquad (1) \\ z_1 &= c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned}$$

где диагональные коэффициенты близки к 1, а остальные бесконечны малы.

Матрица коэффициентов (1) образует тензор, что следует на основании предыдущего только из одного факта существования уравнений (1). Это есть тензор деформации. Его можно всегда считать симметричным, ибо общую бесконечно малую деформацию можно всегда разложить на две: на поворот и на постоянную, так называемую, чистую деформацию, причем поворот имеет антисимметричную матрицу, а чистая — симметричную.*

Рассмотрим формулы малого перемещения точки

$$x_1 = x + u, \quad y_1 = y + v, \quad z_1 = z + w,$$

получаем бесконечно малую деформацию.

$$\begin{aligned} dx_1 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dy_1 &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dz_1 &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz, \end{aligned} \tag{2}$$

где все частные производные мы считаем величинами бесконечно малыми.

Чистая деформация имеет тензор

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), & \frac{\partial w}{\partial z}. \end{matrix} \right\| \tag{3}$$

14. Взаимное соотношение между тензорами напряжения и вариации сводится в схеме упругих тел к известному закону Гука. Его можно формулировать требованием, чтобы составляющие тензора напряжения были линейными функциями составляющих (3) § 13 чистой деформации.

Особенно просто трактуется случай тел изотропных. В этом случае главные направления двух тензоров должны совпадать, ибо нет основания, чтобы трехгранный угол главных направлений одного из тензоров был повернут в какую-либо определенную сторону относительно другого. Тогда

* Д. Граве, ibidem, стр. 147. Русск. изд., стр. 162.

девять коэффициентов уравнений (1) § 11 для одного тензора должны быть пропорциональны соответственным коэффициентам другого тензора. Таким путем получаются дифференциальные уравнения статики упругого тела.*

Подобным же образом трактуется зависимость между двумя тензорами в случае вязкой жидкости. Разница состоит только в том, что вязкость зависит не от самего тензора деформации, а от его изменений по времени. Формально эта разница выражается в том, что в составляющих тензора (1) § 13 u, v, w суть не сами перемещения, а их производные по времени, то есть, составляющие скорости.

Совпадение главных направлений обоих тензоров приводит к уравнениям Навье-Стокса.**

15. В последнее время пользуется известностью школа Осена в Упсале. Он со своими учениками Факсеном, Цейлоном и другими разрабатывает теорию вязких жидкостей. Он откидывает подобно Стоксу члены инерции, но только при помощи известных преобразований переменных оставляет вместо откинутых членов новые члены с первыми степенями частных производных. Таким образом он делает уравнения гидродинамики линейными. Что же касается до линейных уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами, то существуют общие приемы решения их с удовлетворением начальных и граничных условий, которые были указаны еще Коши. Это имеет следствием, что Осеновы уравнения более или менее доступны для детального исследования. Новым в школе Осена является применение интегральных уравнений. Один метод исследования школы Осена заслуживает внимания. Они выводят формулу для сопротивления вязкой жидкости движению твердого тела, причем когда коэффициент вязкости ν приближается к нулю, то следовало бы ожидать приближения к нулю также и величины сопротивления. На самом же деле при $\nu \rightarrow 0$ получается некоторая отличная от нуля величина. Таким образом Осен думает выйти из затруднений Эйлерова парадокса. В 1929 г. проф. Villat (Париж) издал книгу под заглавием «Leçons sur l'Hydrodynamique». Всю последнюю половину этой книги (стр. 151—296) автор посвятил изложению результатов теории Осена. В заключительном слове книги (стр. 296) он пишет: «мы привели в предыдущих главах некоторое число примеров, проведенных до численных выкладок, как приложения Осеновой методы. Численные результаты, как мы видели, плохо согласуются с результатами опыта».

* Д. Граве, ibidem, стр. 157. Русск. изд., стр. 175.

** Д. Граве, ibidem, стр. 187. Русск. изд., стр. 210.

На основании некоторых соображений, помещенных в конце III тома «Механики» Аппеля, я получил мнение, что причина плохого согласия теории Осена с опытом состоит в том, что при выводе уравнений Навье-Стокса необходимо предполагать величины

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

малыми, подобно тому как это делается в теории упругости. Поэтому уравнения Навье-Стокса не могут дать выхода из парадокса Эйлера, который относится к самому общему случаю. В этом смысле я сделал доклад на Съезде математиков в Харькове в 1930 г. В последнее время мои взгляды на этот вопрос несколько изменились.* В письме от 19 III 1932 проф. Прандтль мне сообщил следующее:

«3. Was die Kleinigkeit der Ausdrücke

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \ldots$$

betrifft, so muss man fragen, gegen Was diese klein sein sollen. Die entsprechenden Grössen in der Elastizitätstheorie sind reine Zahlen und müssen deshalb klein gegen 1 sein. In der Hydrodynamik haben die obigen Grössen jedoch die Dimension 1/zeit und es ist die Frage, welche Zeit zum Vergleich herangezogen werden muss. Es ist ziemlich leicht einzusehen, dass dies die Maxwell'sche Relaxations zeit τ ist, die bei allen wenig zähen Flüssigkeiten unmessbar klein ist. Die hydrodynamischen Deformationsgrössen müssen also sehr klein gegen den ungeheuer grossen Wert $\frac{1}{\tau}$ sein. Hiesige Messungen mit Oelen von der Zähigkeit von rd. 5 cgs Einheiten zeigten bei Deformationsgeschwindigkeiten 35000/sec noch keine Abweichungen von der Proportionalität (Drehmoment zwischen konzentrischen Zylindern bei sehr kleinem Spalt)».

Я присоединяюсь вполне к мнению проф. Прандтля и склонен вместе с ним видеть причину практических несогласий теории Осена в его линеаризации уравнений. В письме от 20 II 1932 проф. Прандтль пишет:

«Aber Oseen vernachlässigt in den Beschleunigungsgliedern so viel, dass er sich dadurch von der Newtonschen Mechanik entfernt und dadurch ergeben sich die Abweichungen».

* Д. Граве, ibidem, стр. 197. Русск. изд., стр. 221.

Я должен обратить внимание на то обстоятельство, что величины (1) могут быть малы также и при очень больших значениях скоростей. Например, винтовое движение жидкости, определяемое формулами

$$u = a, \quad v = -e^{-k^2(y^2+z^2)} \cdot z\omega, \quad w = e^{-k^2(y^2+z^2)} \cdot y\omega,$$

где a очень большое постоянное число, а ω очень малое число, имеет очень большие скорости, тогда как величины (1) малы.

16. Рассмотрим еще вопрос о прилипании жидкости к движущемуся в ней твердому телу. Я считал сомнительным предположение о полном прилипании жидкости при очень больших скоростях. Для проверки я придумал такой опыт. Горизонтальный диск, верхняя сторона которого гладкая, а нижняя шереховатая, вращается около вертикальной оси, проходящей через его центр. По интуиции я ожидал происхождения при вращении подъемной силы. Мои соображения были такие. Гладкая сторона менее увлекает за собой воздух, чем нижняя, а потому относительная скорость воздуха сверху больше, а значит давление сверху должно быть меньше. Акад. Г. Ф. Проскура в своем Харьковском аэродинамическом институте осуществил по моей просьбе опыт, и он дал положительные результаты. Проф. Прандтль считает, что полное смачивание есть свойство, вполне установленное опытом, и оно должно быть принимаемо при всех теоретических соображениях. Что касается до опыта акад. Проскуры, то он приписывает несимметричность тому, что более шереховатая поверхность увлекает за собой более толстый слой воздуха.

17. Соображения первых параграфов настоящей статьи о значении размеров длин и скоростей в гидродинамических вопросах подтверждаются в последнее время тем, что все более и более получает значение Рейнольдсово число $R = \frac{lv}{\nu}$, где l характерная для задачи длина, v — характерная скорость, а ν — коэффициент вязкости.

Большое число важных как теоретических так и практических соображений, относящихся сюда, можно найти в цитированной мною книге проф. Прандтля по гидромеханике.

5 IV 1932.

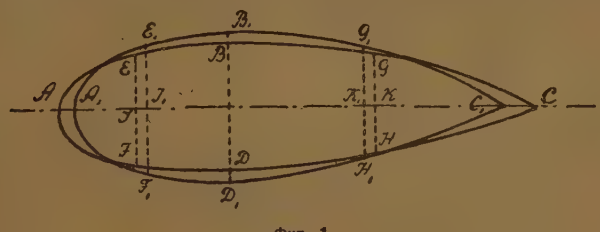
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ МАТЕРЧАТЫХ БАЛЛОНОВ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ТЕЛАМИ ВРАЩЕНИЯ, ПОД ДАВЛЕНИЕМ ВОЗДУХА

А. Г. ВОРОБЬЕВА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

Вопрос об определении деформаций матерчатых баллонов, имеющих формы тел вращения, представляет большой интерес с точки зрения воздушного судостроения. В связи с этим автору настоящей работы пришлось дать математическую обработку задачи об определении деформаций упомянутых выше баллонов, наполненных воздухом под давлением. Зачатки решения подобной задачи имеются в книге «R. Haas und A. Dietzius. Stoff-

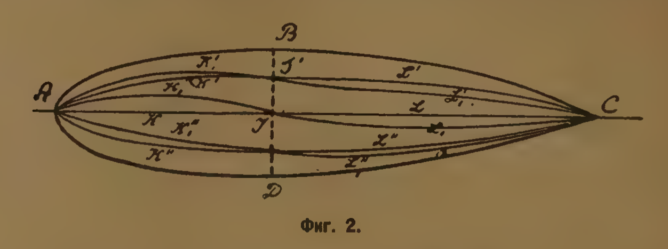


Фиг. 1.

dehnung und Formänderung der Hülle von Prall-Luftschiffen. Berlin. Verlag von Julius Springer. 1913.» Однако в ней вопрос не рассмотрен с достаточною полнотою. Настоящая работа, исполненная по поручению Научно-Исследовательского Аэро-Института при Учебном комбинате Гражданского воздушного флота, имеет своею основною задачею подобной полноты достигнуть.

Матерчатый баллон, подвергнутый внутреннему давлению, вообще говоря испытывает два основных вида деформаций: линейные деформации и деформации кручения. Первые наиболее наглядно проявляются в изменении, напр., длины баллона и диаметров его тех или иных поперечных сечений. В корпусах мягких воздушных судов длина AC (фиг. 1) баллона

обычно по мере возрастания давления уменьшается ($A_1 C_1$ на фиг. 1), а диаметры поперечных сечений увеличиваются ($E_1 F_1$ вместо EF, $B_1 D_1$ вместо BD, $G_1 H_1$ вместо GH и т. д.). Деформации кручения состоят в том,



Фиг. 2.

что по мере возрастания диаметров сечения EF, BD, GH и т. д. поворачиваются около оси баллона так, что, напр., меридиан $AKILC$ (фиг. 2)

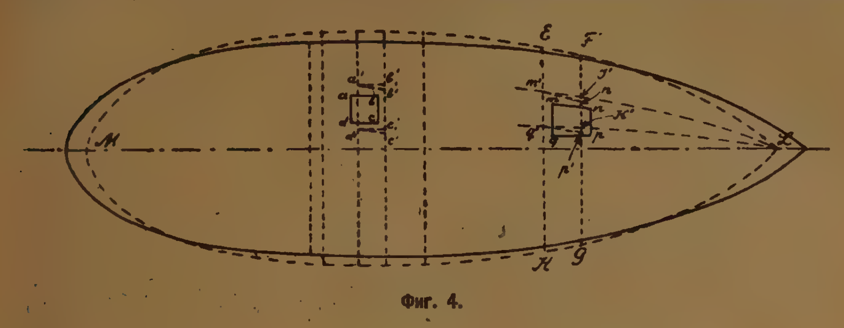


Фиг. 3.

превращается в некоторую кривую $AK_1 IL_1 C$, меридиан $AK' I' L' C$ в $AK_1' I' L_1' C$ и т. д. и т. д.

Для более ясного представления о кручении мы приводим фотографию (фиг. 3) одного из матерчатых баллонов Аэростатической лаборатории Учебного комбината Гражданского воздушного флота в Ленинграде.

Подобного рода деформации являются последствием того, что элементарные прямоугольники $abcd$ (фиг. 4) в цилиндрической части (если таковая существует) баллона и элементарные равнобедренные трапеции $mnpq$



Фиг. 4.

в остальных его частях (носовой и кормовой) обращаются в первом случае в параллелограммы $a'b'c'd'$, а во втором — в некоторые четыреугольники $m'n'p'q'$ неправильной формы. Для более ясного представления последнего случая четыреугольник $m'n'p'q'$ изображен в развернутом на плоскость виде на фиг. 5. На ней $Am'q'B$ и $Cn'p'D$ являются дугами окружностей, ограничивающих развернутую на плоскость боковую поверхность усеченного конуса $EFGH$ фиг. 4, $m'I$ и $q'K$ на фиг. 5 изображают части $m'I'$ и $q'K'$ меридианов $m'L$ и $q'L$ на фиг. 4. Углы $Im'n'$ (фиг. 5) $=$ $I'm'n'$ (фиг. 4) $= Kq'p'$ (фиг. 5) $= K'q'p'$ (фиг. 4) являются углами сдвига.

Фиг. 5.

Линейные деформации каждого такого элемента определяются относительными удлинениями

$$\varepsilon_2 = \frac{a'b_1' - ab}{ab} = \frac{d'c_1' - dc}{dc}$$

(в цилиндрической части баллона) или

$$(1) \qquad \varepsilon_2 = \frac{m'I' - mn}{mn} = \frac{q'K' - qp}{qp}$$

(в конической его части) и

$$\varepsilon_1 = \frac{a'd' - ad}{ad} = \frac{b'c' - bc}{bc}$$

(в цилиндрической части) или

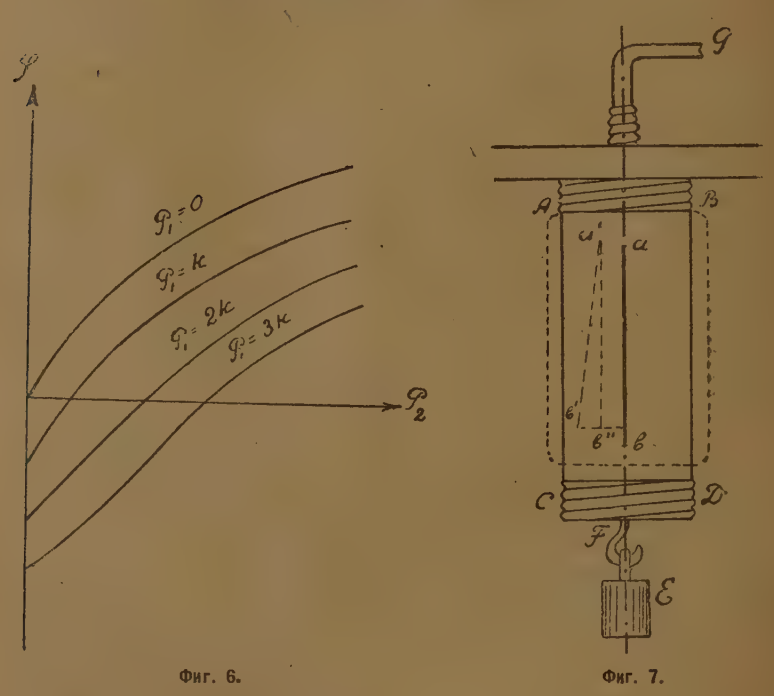
$$\varepsilon_1 = \frac{m'q' - mq}{mq} \tag{2}$$

(в конической части).* Кручение определяется уже отмеченными выше углами сдвигов

$$\varphi = \angle b'_1 a' b' = \angle c'_1 d' c'$$

(в цилиндрической части) или

$$\varphi = \angle I' m' n' = \angle K' q' p'$$



Фиг. 6. Фиг. 7.

(в конической). Численные значения ε_1 и ε_2 определяются так называемою нормальною характеристикою, понятие о которой дано Гаасом в упоминавшейся уже его работе, написанной вместе с Дитциусом. Что касается сдвига, то таковой может быть определен по аналогичной же характери-

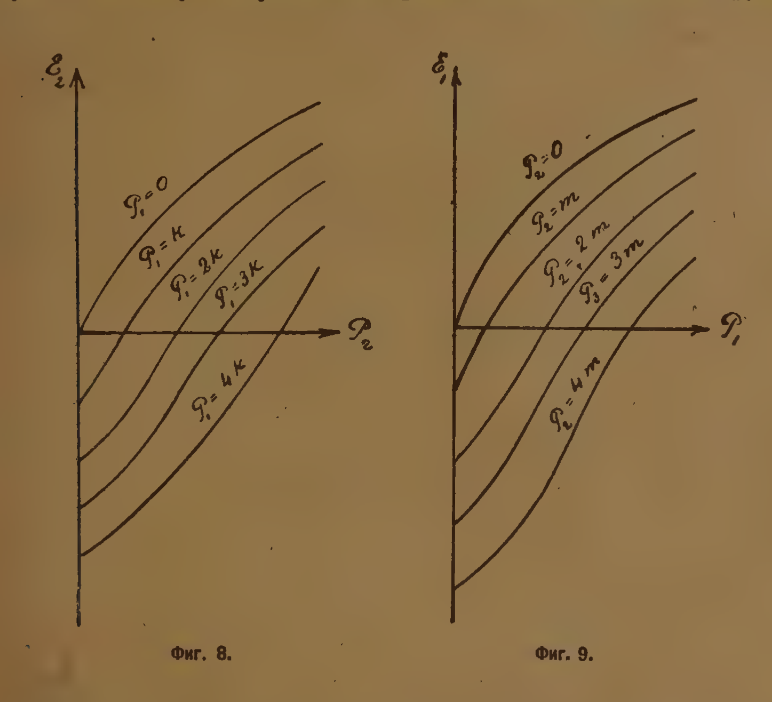
* В равенстве (2) мы не можем по аналогии с (1) написать

$$\frac{m'q' - mq}{mq} = \frac{n'p' - np}{np}$$

так как

$$\frac{n'p' - np}{np} = \frac{m'q' - mq}{mq} + d\left(\frac{m'q' - mq}{mq}\right)$$

стике сдвига, один из образцов которой представлен на фиг. 6. На ней P_2 — напряжения в материи по одному направлению, а P_1 — по другому к нему перпендикулярному. Получить эту характеристику возможно, организовав, например, опыт, представленный на фиг. 7. На ней AB и CD два шкива, на которые надет матерчатый цилиндр $ABCD$, непроницаемый для воздуха. К нижнему шкиву помощью крюка F можно подвешивать грузы E



Фиг. 8. Фиг. 9.

различной величины. Внутрь цилиндра под давлением можно давать воздух. Различными комбинациями этого давления и грузов E можно давать P_2 и P_1 различные соотношения. Наблюдая для этих различных комбинаций углы $b'\,a'\,b''$, мы имеем возможность получить характеристику, представленную на фиг. 6. При этом придется принять особые меры к исключению влияния на результаты неоднородности материи, гистерезиса и последовательности перемен давлений и грузов E. Гаасом при изложении способов получения нормальных характеристик даны методы для подобного исключения, которые остается лишь перенести на случай получения интересующей нас характеристики сдвига.

Напомним, что нормальные характеристики баллонных материй имеют виды, один из коих представлен на фиг. 8 и 9.

Если нам известны характеристики, изображенные на фигурах 6, 8 и 9, то нахождение деформаций баллона $ABCDA$ (фиг. 10) может быть сделано нижеследующим образом. Поперечное (σ_1) и продольное (σ_2) напряжения в любой точке G поперечного сечения EF баллона (предполагаемого невесомым) определяются известными равенствами

(3) $$\sigma_1 = \left(1 - \frac{\rho'}{2\rho''}\right) p\rho'$$

и

(4) $$\sigma_2 = \frac{1}{2} p\rho'$$

где ρ' и ρ'' главные радиусы кривизны поверхности нашего баллона в рассматриваемой точке G, а p — сверхдавление в баллоне. Поскольку ρ' определяется равенством

$$\rho' = \frac{y}{\cos\delta}$$

где y и δ показаны на фиг. 10, равенства (3) и (4) могут быть представлены в виде

(5) $$\sigma_1 = \left(1 - \frac{y}{2\rho''\cos\delta}\right) \frac{py}{\cos\delta}$$

и

(6) $$\sigma_2 = \frac{py}{2\cos\delta}.$$

Так или иначе, но с помощью ли (3) и (4) или (5) и (6) можно получить распределение напряжений σ_1 и σ_2 по всей поверхности баллона, представленного на фиг. 10. Очевидно, что σ_1 и σ_2 будут меняться лишь вдоль меридиана $AEBHC$, оставаясь одинаковыми по всем точкам G данного поперечного сечения EF. Зная таковые, мы можем помощью фиг. 9, 8 и 6 найти распределение по всей поверхности величин ε_1, ε_2 и φ. Мы будем предполагать, что и эти три величины меняются лишь вдоль меридианов, оставаясь одинаковыми для одной и той же параллели.

В таком случае сразу же не представляет никаких затруднений определить приращение длины любого участка EBH меридиана $AEBHC$ из равенства

(7) $$\Delta\overparen{EBH} = \int\limits_{\overparen{EBH}} \Delta ds'' = \int\limits_{\overparen{EBH}} \varepsilon_2\, ds'',$$

где ds'' элемент дуги EBH, показанный на фиг. 10. Если прямая AC взята за ось x'ов с положительным направлением от A к C, то равенство (7) может быть представлено в виде

$$\Delta \widetilde{EBH} = \int_I^K \frac{\varepsilon_2}{\cos\delta}\, dx = \int_I^K \varepsilon_2 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{8}$$

Фиг. 10.

Равенствами (7) и (8) определяется, очевидно, приращение и всего меридиана ABC.

Новая ордината старой точки E (фиг. 1) определяется равенством

$$y_1 = (1+\varepsilon_1)\, y. \tag{8'}$$

Фиг. 11.

Для нахождений новых местоположений E_1F_1, G_1H_1 и т. д. старых сечений EF, GH и т. д. рассмотрим два сечения ac и bd (фиг. 11) недеформированного баллона, находящиеся на бесконечно близком друг от друга расстоянии $dx = a'b'$. Предположим, что после деформации эти сечения заняли положения a_1c_1 и b_1d_1, причем расстояние между ними стало

$$a'_1 b'_1 = dx_1.$$

Очевидно

$$dx_1 = a'_1 b'_1 = a_1 b_1 \cos\delta = (ds'' + \Delta ds'')\cos\delta_1 =$$

(9)

$$= (1 + \varepsilon_2)\cos\delta_1 \cdot ds'' = (1 + \varepsilon_2)\frac{\cos\delta_1}{\cos\delta}\cdot dx.$$

Но

$$\sin\delta_1 = \frac{b'_1 b_1 - a'_1 a_1}{a_1 b_1} = \frac{dy_1}{ds_1''} = \frac{(1+\varepsilon_1)\,dy}{(1+\varepsilon_2)\,ds''} = \frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2}\sin\delta.$$

Значит

$$\cos\delta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2}\right)^2 \sin^2\delta}$$

и

$$\frac{\cos\delta_1}{\cos\delta} = \sqrt{\sec^2\delta - \left(\frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2}\right)^2 \operatorname{tg}^2\delta} = \sqrt{1 - \left[\left(\frac{1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_2}\right)^2 - 1\right]\operatorname{tg}^2\delta}$$

или

$$\frac{\cos\delta_1}{\cos\delta} = \sqrt{1 - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_2)^2}\cdot \operatorname{tg}^2\delta}.$$

Подставляя это значение $\frac{\cos\delta_1}{\cos\delta}$ в (9), найдем

$$dx_1 = \sqrt{(1+\varepsilon_2)^2 - (2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\operatorname{tg}^2\delta}\cdot dx.$$

Вводя сюда функцию от ε_1, ε_2 и δ, т. е. являющуюся в конечном счете функциею от x,

(10) $$\alpha = \sqrt{(1+\varepsilon_2)^2 - (2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\operatorname{tg}^2\delta}$$

получаем

(10') $$dx_1 = \alpha dx^*.$$

Новая длина $I_1 K_1$ (фиг. 1) прежнего участка IK баллона будет очевидно

$$I_1 K_1 = \int_{I_1}^{K_1} dx_1 = \int_I^K \alpha dx,$$

а новая длина $A_1 C_1$ всего баллона

$$A_1 C_1 = \int_A^C \alpha dx.$$

* Отсюда видно, что физическое значение α есть не что иное, как отношение $a'_1 b'_1 : a' b'$ (фиг. 11). Вообще говоря, оно близко к единице, будучи обычно меньше таковой.

Часто интереснее иметь дело с изменением длин, а не с самими новыми длинами. Очевидно

$$dx_1 - dx = (\alpha - 1)\, dx$$

или, вводя

$$\alpha - 1 = -\beta,$$

$$dx_1 - dx = -\beta dx.^*$$

В таком случае

$$\Delta IK = I_1 K_1 - IK = -\int_I^K \beta dx,$$

а

$$\Delta AC = A_1 C_1 - AC = -\int_A^C \beta dx.$$

Для α и β можно дать несколько видов приближенных значений. Так например, из (10) в силу малости ε_2 в сравнении с 1, и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ в сравнении с 2, можно написать

$$(11) \qquad \alpha \cong \sqrt{(1 + 2\varepsilon_2) - 2\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta} = \sqrt{1 - 2(\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta - \varepsilon_2)},$$

где введено обозначение

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varepsilon.$$

При малости в сравнении с 1 числа $2(\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta - \varepsilon_2)$ приближенная формула может быть упрощена еще более, если написать ее в виде

$$(12) \qquad \alpha \cong 1 - (\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta - \varepsilon_2).$$

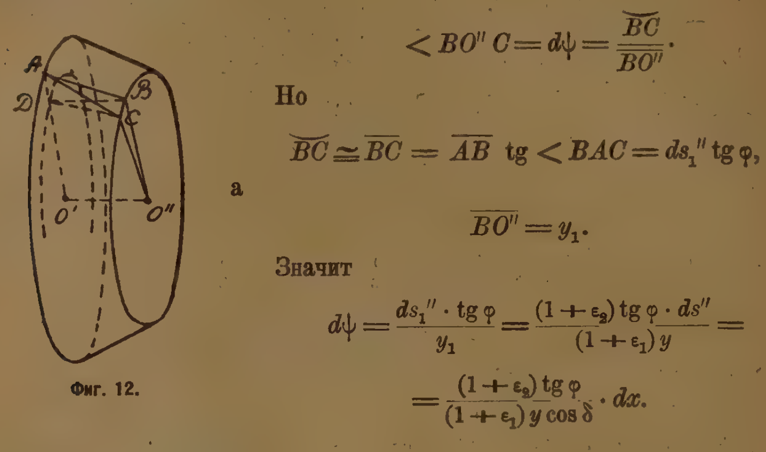
В связи с этими формулами для функции α становятся ясными приближенные формулы для β. Мы отметим лишь, что в случае справедливости (12)

$$\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta - \varepsilon_2 = \beta.$$

Предыдущие рассуждения относились к нахождению линейных деформаций. Кручение определится из рассмотрения элемента объема деформи-

* Отсюда видно, что физическим значением β является относительное изменение длины dx. Вообще говоря оно малая дробь и, обычно, отрицательно.

рованного баллона, представленного на фиг. 12. На ней угол $BO''C$ есть угол поворота сечения O'' против сечения O'. Очевидно, что если $O'O'' = dx$, т. е. бесконечно мало, то



Фиг. 12.

$$\angle BO''C = d\psi = \frac{\overset{\frown}{BC}}{\overline{BO''}}.$$

Но

$$\overset{\frown}{BC} \cong \overline{BC} = \overline{AB}\ \operatorname{tg} \angle BAC = ds_1''\operatorname{tg}\varphi,$$

а

$$\overline{BO''} = y_1.$$

Значит

$$d\psi = \frac{ds_1'' \cdot \operatorname{tg}\varphi}{y_1} = \frac{(1+\varepsilon_2)\operatorname{tg}\varphi \cdot ds''}{(1+\varepsilon_1)\,y} =$$

$$= \frac{(1+\varepsilon_2)\operatorname{tg}\varphi}{(1+\varepsilon_1)\,y\cos\delta}\cdot dx.$$

Вводя обозначение

$$(12') \qquad \frac{(1+\varepsilon_2)\operatorname{tg}\varphi}{(1+\varepsilon_1)\,y\cos\delta} = \lambda,$$

получаем

$$(13) \qquad d\psi = \lambda dx.$$

Здесь λ есть, очевидно, некоторая функция от x, определяемая с одной стороны геометриею меридионального обвода баллона (через y и δ), а с другой стороны свойствами материи, из которой этот баллон построен (через ε_1, ε_2, и φ). Из выражения для λ видно, что по ординатам фиг. 6 нам лучше иметь отложенными не самые углы φ, а тангенсы таковых.

Интегрированием уравнения (13) в соответственных пределах мы можем получить кручение либо любой части IK (фиг. 1) баллона, либо всего баллона полностью.

Знание линейных деформаций баллона в направлении оси и перпендикулярно к таковой дает возможность легко установить новый его объем или, что одно и то же, отличия этого объема от начального. В самом деле. Называя объем элемента $a_1 b_1 d_1 c_1$ (фиг. 11) через dV_1, имеем

$$(14) \qquad dV_1 = \pi y_1^2\, dx_1.$$

Этот же элемент, занимавший до деформации положение $abcd$, имел тогда объем

$$(15) \qquad dV = \pi y^2\, dx.$$

Деля (14) на (15) получаем

$$\frac{dV_1}{dV} = \left(\frac{y_1}{y}\right)^2 \cdot \frac{dx_1}{dx},$$

что в силу (8′) и (10′) дает

$$\frac{dV_1}{dV} = \alpha(1 + \varepsilon_1)^2$$

и значит

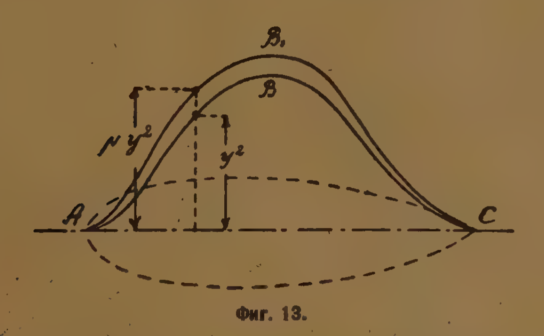
(16) $$dV_1 = \mu dV,$$

где

(17) $$\mu = \alpha(1 + \varepsilon_1)^2.$$

Из (16)

$$V_1 = \int_A^C \mu dV = \pi \int_A^C \mu y^2 \, dx.$$



Фиг. 13.

Отсюда видно, что для вычисления нового объема V_1 следует лишь вместо прежней кривой ABC (фиг. 13), ординаты которой изображают y^2, вычертить кривую AB_1C с ординатами μy^2 и проинтегрировать новую площадь.

Увеличение объема

$$V_1 - V = \int_A^C (\mu - 1) dV = \pi \int_A^C (\mu - 1) y^2 \, dx.$$

Аналогично приближенным формулам для α можно, пользуясь сравнительною малостью величин ε_1 и ε_2, дать такие же формулы и для μ. Так, например, используя (11) можно написать

$$\mu \simeq (1 + 2\varepsilon_1)\sqrt{1 - 2(\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta - \varepsilon_2)}$$

или

$$\mu \cong (1 + 2\varepsilon_1)[1 - (\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta - \varepsilon_2)]$$

или, наконец,

$$\mu \cong 1 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta.$$

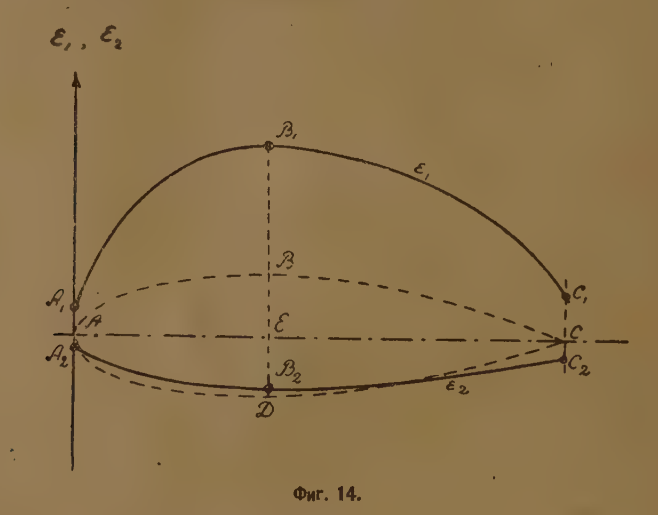
В миделе это дает

$$\mu \cong 1 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

что есть ничто иное как приближенное выражение для точного значения,

$$\mu = (1 + \varepsilon_1)^2 (1 + \varepsilon_2),$$

получаемого из (17) и (10), полагая в (10) $\delta = 0$.



Фиг. 14.

Интересно установить порядки величин α, λ и μ и их изменения вдоль баллона для обычно применяемых в воздушном судостроении баллонов. Первые представления по вопросу об α и μ могут быть получены из рассмотрения приближенных значений для

$$\alpha = 1 - (\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta - \varepsilon_2)$$

и

$$\mu = 1 + 2\varepsilon_1 - (\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta - \varepsilon_2)$$

или лучше для

(18) $$\beta = 1 - \alpha = \varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta - \varepsilon_2$$

и

(19) $$\nu = \mu - 1 = (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta = 2\varepsilon_1 - (\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta - \varepsilon_2) = 2\varepsilon_1 - \beta.$$

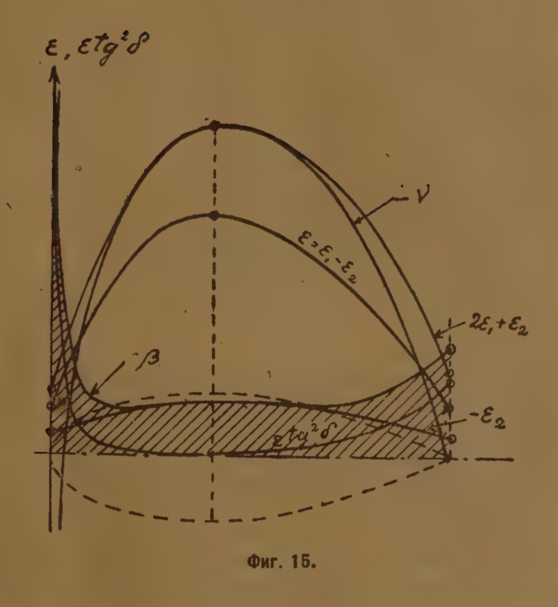
На фиг. 14 в виде кривой $A_1 B_1 C_1$ показано изменение вдоль судна удлинения ε_1, а в виде кривой $A_2 B_2 C_2$ — удлинения ε_2. Из нее видно, что ε_1 является в большинстве случаев положительным, а ε_2 отрицательным. Из нее же видно, что численное значение ε_2, вообще говоря, заметно меньше численного значения ε_1. В миделе численные значения этих двух удлинений достигают своих максимальных значений (EB_1 и EB_2), монотонно к обоим концам баллона уменьшаясь.

Таким образом, значения β и ν в миделе оба положительны, причем

(20) $$\beta = -\varepsilon_2$$

а

(21) $$\nu = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$



Фиг. 15.

По мере удаления от миделя в ту или иную сторону, обе эти функции все более и более отступают от $-\varepsilon_2$ и $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ на величину $\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta$.

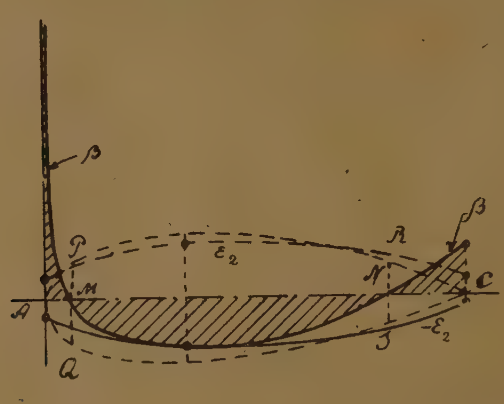
Если удаления от миделя еще невелики, то δ и, значит, $\operatorname{tg} \delta$ малы, и β и ν попрежнему сохраняют свои прежние значения (20) и (21) (в смысле возможности пренебречь поправкою $\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta$). Однако наступает момент, когда поправкою $\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta$ пренебрегать уже нельзя. Таким образом получаются кривые изменения ν и β, представленные на фиг. 15. Нужно помнить, однако, что формулы (18) и (19) являются справедливыми лишь постольку,

поскольку вместо (10) справедлива формула (12). Между тем последняя может считаться достаточно точной лишь при достаточной малости δ (именно лишь при этой достаточной малости мы можем перейти от (11) к (12)). Начиная с некоторого достаточно удаленного от миделя сечения, требуемая достаточная малость перестает существовать, и вычисление β следует вести по формуле

$$\beta = 1 - \sqrt{1 - 2(\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta - \varepsilon_2)},$$

а ν по формуле

$$\nu = (1 + 2\varepsilon_1)\sqrt{1 - 2(\varepsilon \operatorname{tg}^2 \delta - \varepsilon_2)} - 1.$$



Фиг. 16.

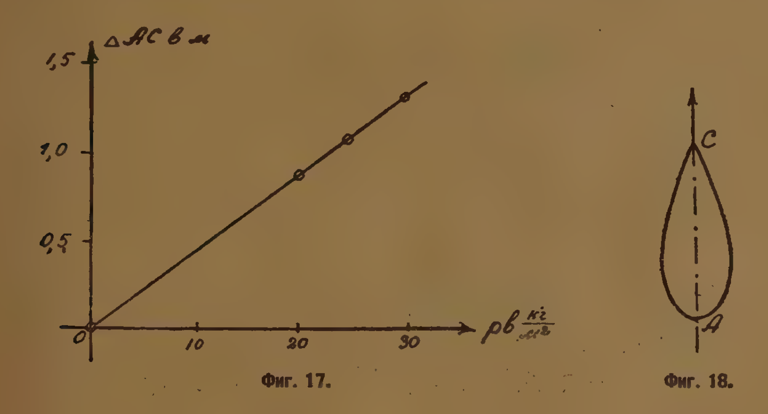
Не исключена возможность необходимости (в особенности если баллон заканчивается таким образом, что касательная к обводу в крайней точке перпендикулярна к оси) применять и более точные исходные формулы.

Могут существовать материи, у которых $\varepsilon_2 > 0$. В таком случае кривая β имеет вид, показанный на фиг. 16. От сечения PQ до RS происходит удлинение баллона, а левее первого и правее второго его укорочения. В заключение отметим, что заштрихованные на фиг. 15 и 16 площади, будучи пропланиметрированы, дают полные укорочения или удлинения баллонов. Подобным способом П. Я. Кочиной, по нашему поручению, был произведен подсчет деформаций матерчатого баллона из прорезиненной двухслойной материи, состоящего из двух полуэллипсоидов вращения. Длина носового полуэллипсоида была 30.85 м, кормового 15.60 м. Диаметр миделя был 10.32 м. Получившиеся для трех сверхдавлений укорочения приведены в нижеследующей таблице и представлены на фиг. 17.

№№ по порядку	Сверхдавления в кг/м²	Укорочения в м
1	20	0.84
2	25	1.09
3	30	1.30

Замечательно, что все три точки оказались лежащими на одной прямой и притом проходящей через начало координат.

Что касается функции λ, то в силу отсутствия опытных данных об изменениях вдоль оси баллонов $\operatorname{tg} \varphi$, автор лишен возможности высказать о ней те или иные суждения.



Фиг. 17. Фиг. 18.

Изложенными в настоящей работе способами представляется возможным определить деформации интересующих нас баллонов и в том случае, когда сверхдавления p, оставаясь одинаковыми по всему периметру данного поперечного сечения EF, BD, GH и т. д., изменяются по тому или иному закону при переходе от одного сечения к другому. Все изменение будет состоять тогда в том, что σ_1 и σ_2 определяются несколько более сложным образом, нежели применением формул (3) и (4) или (5) и (6). Решение подобной задачи может представлять некоторый интерес для определения, например, деформаций вертикально расположенных балластных резервуаров формы, изображенной на фиг. 18.

В частности, как известно, в таком случае сверхдавление будет уменьшаться от точки A до C по линейному закону.

В заключение отметим, что деформации, определенные как уже изложено, являются деформациями, вычисленными лишь в первом приближении. Определив на основании этих вычислений новый меридианальный обвод, мы можем вычислить σ_1 и σ_2 во втором приближении, взять новые ε_1 и ε_2 и по-

вторить все выкладки вновь. В результате мы получим меридианальные обводы второго приближения. Таким же образом могут быть определены обводы третьего приближения и т. д. Следует думать, что обводы уже второго приближения являются настолько близкими к обводам последующих приближений, что вряд ли имеет смысл продолжать работу далее.

Наконец отметим, что изложенные методы не учитывают влияния швов. Вопрос о введении соответствующей поправки стоит вне плоскости настоящей работы.

Ленинград, 7 февраля 1932 г.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

КРИСТАЛЛ КАК НЕПРЕРЫВНАЯ СРЕДА[1]

А. В. ШУБНИКОВ

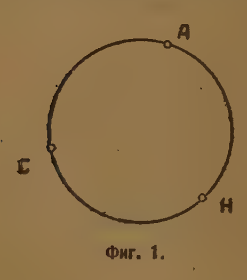
(*Представлено академиком* В. И. Вернадским)

Организационное бюро настоящей конференции, посвященной вопросам строения молекул, просило меня сделать обзорный доклад на тему о строении кристаллов, резонно полагая, что вопросы строения кристаллов теснейшим образом связаны с вопросами строения молекул, поскольку кристалл можно рассматривать как совокупность бесконечного множества молекул или как одну бесконечно большую молекулу. В ответ на это предложение я, не чувствуя себя вполне готовым к выполнению такой ответственной роли, выдвинул свое более скромное предложение — осветить, если хотите, диаметрально противоположный вопрос о кристалле, как непрерывной среде, в которой роль молекул или атомов играют математические точки, лишенные размеров, и, тем не менее, без промежутков выполняющие все пространство. Естественно спросить, в какой мере уместна эта тема на конференции, интересующейся строением молекулы и потому как бы наперед отрицающей возможнсть непрерывного строения вещества. Ответом на этот вопрос будет сам мой доклад, который я начну с небольшой исторической справки.

Вопросами строения вещества издавна занималась философия; занималась ими химия и физика, и в зависимости от того, как разрешались эти вопросы, возникали различные течения и в других науках, в частности математике, биологии и т. д. В философии атомы появились 2300 лет тому назад в атомистической теории Демокрита; его атомы состояли из сплошного вещества и плавали в пустоте, которая, надо полагать, была также непрерывна. Но если философы первые открыли атомы, то они же первые встали на путь их отрицания, и к 1800 г. Кант полностью разрушил

[1] Доложено на VIII Всесоюзной конференции по физико-химическим вопросам 15 дек. 1931 г.

атомистическую теорию. После Канта в философии начинается новый период приспособления атомистической теории к теории сплошного строения материи (Фехнер 1864). В химии атомистическая теория завоевывает себе прочное положение как раз в то время, когда в философии она перестает существовать. Как известно Дальтон опубликовал свою теорию в 1808 г., т. е. через два года после смерти Канта. Далее в конце XIX столетия возникают сомнения (Оствальд) в правильности и полезности атомистической теории. В неявной форме эти сомнения продолжают существовать и теперь и выражаются в усиленном интересе химиков к коллоидной химии и к химии неопределенных и нестойких соединений. Но если научная химия, как и философия, начинает свое существование с момента установления атомистической теории (Дальтон и Лавуазье были современниками), то физика за сто лет до рождения научной химии могла пышно развиваться только на почве признания непрерывного строения материи. Корпускулы Ньютона и монады Лейбница не могли выдержать конкуренции с lex continui того же Лейбница и не могли задержать победоносного шествия дифференциального и интегрального исчисления, изобретенного ими же и наилучшим образом отражавшего общую тенденцию физики. Атомистическая теория по настоящему овладевает физикой только во второй половине XIX в. с появлением кинетической теории, квантовой теории, с открытием радиоактивности и т. д. Синтез обеих точек зрения начинается в физике только в XX в. с возникновением волновой механики. Сказанное можно было бы иллюстрировать следующей схемой (фиг. 1). Начертим окружность и отметим на ней три точки *A*, *H* и *C*, которые должны соответственно обозначить атомистическую теорию, теорию непрерывного строения материи и синтез обеих теорий; тогда вращение по часовой стрелке из точки *A*, или *AHC*, будет изображать исторический путь философии и химии в отношении строения материи, а обратное вращение из точки *H* — путь физики. Других путей нет и быть не может, ибо синтезу двух идей должны предшествовать сами идеи.



Фиг. 1.

Итак мы видели как развивалось учение о строении материи в философии, физике и химии, но для нас в настоящий момент представляет особый интерес, как воспринимала это учение наука о кристаллах или кристаллография в широком значении этого слова. Рожденные в один и тот же 1669 г. две сестры — геометрическая кристаллография (закон Стенона)

и кристаллооптика (двойное лучепреломление в кальците, открытое Бартолином) по разному отнеслись к строению материи. Кристаллооптика и вообще кристаллофизика целиком приняла непрерывность материи, присоединившись к физике и держалась этой позиции до конца XIX в., вернее сказать атомистическая теория не оказала никакого влияния на развитие кристаллооптики, а геометрическая кристаллография заняла выжидательное положение, накапливала фактический материал и, по существу, едва ли была настоящей наукой в течение первых ста лет своего существования. Лишь с открытием закона целых чисел Гаюи (1784), по времени почти точно совпавшим с открытием закона кратных отношений Дальтона, геометрическая кристаллография приобрела свое настоящее лицо и свое определенное отношение к строению материи, близкое к воззрениям химии.

Эту солидарность с химией геометрическая кристаллография сохранила до сих пор и только во второй половине XIX в. наметился некоторый ее сдвиг в сторону непрерывности. Главнейшие исторические этапы геометрической кристаллографии даны в следующей таблице 1.

Таблица 1

Годы	Автор	Открытие
1669	Стенон	Закон постоянства углов
1784	Гаюи	Закон целых чисел
1804—1809	Вейсс	Закон зон
1825	Миллер	Индексы граней
1830	Гессель	32 класса симметрии
1850	Бравэ	14 пространственных решеток
1868—1869	Жордан	Непрерывные пространственные группы первого рода
1879	Зонке	Прерывные пространственные группы первого рода
1891	Федоров и Шенфлис	Прерывные пространственные группы обоих родов

Из этого перечня мы видим, что понятие непрерывных пространственных групп введено впервые Жорданом во второй половине XIX в. Но последний был чистым математиком и потому сам не мог оценить того значения, которое могла бы иметь его работа для кристаллографии и физики. В свою очередь кристаллографы не обратили должного внимания на работу Жордана и после работы Федорова и Шенфлиса продолжали заниматься отделкой деталей созданного ими грандиозного здания. Таковы работы Александера, Херманна, Херрманна, Хееша, Вебера, Ниггли, Вейссенберга, Хильтона, Шибольда, Полиа, Гюнцбурга и многих других, не исключая и самих Федорова и Шенфлиса. Блестящее открытие Лауэ диффракции рент-

геновых лучей кристаллами, подтвердившее атомистическую теорию строения кристаллов Федорова и Шенфлиса, казалось, окончательно отвлекло внимение исследователей от пути, начатого Жорданом. Возникла новая наука — рентгенография кристаллов, объединившая в себе тысячи исследований по атомистическому строению кристаллов. По мере расширения этой науки в область ее исследований стали проникать сначала кристаллические порошки, далее жидкости, волокнистые структуры, жидкие кристаллы и т. д., т. е. такие среды, которые, по крайней мере статистически, можно было рассматривать как среды непрерывные. От отрицания непрерывности рентгенология пришла к отрицанию этого отрицания.

Следующим неизбежным этапом развития геометрической кристаллографии должен быть вывод непрерывных групп обоих родов, т. е. групп движений и групп движений с зеркальными отражениями. Этой задачей довелось заняться нам. С разрешением этой задачи геометрическая кристаллография вступает на уготованный ей историей путь для того, чтобы далее стать геометрией анизотропных сред непрерывных или прерывных — все равно. Ставши на этот путь, геометрическая кристаллография теснейшим образом сливается с геометрией, с кристаллографией физической, а через нее с физикой и химией вообще.

В настоящем докладе я постараюсь в самых общих чертах охарактеризовать учение о непрерывных однородных средах, не вдаваясь в доказательство относящихся к нему теорем. Как и всякая другая геометрия, теория непрерывных сред может быть одномерной, двумерной, трехмерной и т. д. Нас сейчас будет интересовать только трехмерная геометрия; изложение мы начнем с определения элементов пространства — точки. Под точкой мы будем понимать то же, что понимают под этим термином в эвклидовой геометрии; только мы лишим эвклидову точку ее неизменного и всегда молчаливо приписываемого ей аттрибута — шаровой симметрии. Нашим точкам мы будем приписывать все возможные мыслимые симметрии — симметрии точечных групп. Вместо самого разумного для эвклидовой геометрии способа изображать точки шариками (или для плоскости кружочками) мы будем применять способ изображения точек маленькими многогранниками, а для плоскости — многоугольниками, ни на одну минуту не забывая, что размеры наших многогранников бесконечно малы. Можно также понимать под нашей точкой просто некую совокупность элементов симметрии, пересекающихся в эвклидовой точке (точечная группа элементов симметрии), отчего последняя, конечно, уже перестает быть обыкновенной эвклидовой точкой.

Чтобы окончить с определением точки, заметим, что элементы симметрии точки мы мыслим себе одновременно как элементы симметрии самой среды, ибо, коль скоро окружающие данную точку другие точки распределены около данной точки по законам, не отвечающим симметрии данной точки, то и данная точка меняет приписываемую ей симметрию. Отсюда отнюдь нельзя утверждать обратного, а именно, что все элементы симметрии среды должны содержаться среди элементов симметрии точек, ибо существуют элементы симметрии, присущие исключительно бесконечным фигурам (оси трансляций T_n, винтовые оси L^t_κ, плоскости скользящего отражения P_t), а непрерывная среда мыслится нами в противоположность точкам как фигура беспредельно большая. Итак, с одной стороны, мы лишили точки их неизменности, с другой — отказались рассматривать их вне зависимости от других точек.[1] Далее мы ограничили себя, из соображений экономии мысли и целесообразности, рассмотрением исключительно однородных непрерывных сред, понимая под ними такие среды, которые сплошь состоят из равноценных точек или, иначе, точек одинаковой симметрии. После этих предпосылок наша проблема формально математически может быть сформулирована следующим образом. Мы желаем найти, описать и классифицировать все такие непрерывные среды, которые удовлетворяют требованию однородности и непрерывности. Так как наши точки являются для непрерывных сред такими же структурными элементами, как узлы пространственных решеток являются структурными элементами решеток, то нашу задачу мы можем рассматривать как задачу изучения всевозможных структур непрерывных сред. Это формально, а по существу мы ставим себе целью дать теорию структуры таких встречающихся в природе непрерывных однородных или статистически однородных средин, которые не укладываются в понятие пространственных решеток или правильных систем точек.

Мы не будем излагать здесь полного вывода всех случаев симметрии однородных сред; этот вывод хотя и схематически, но до конца сделан и опубликован в Zeitschrift für Kristallographie *72*, 271, 1929; и *73*, 430, 1930. Мы ограничимся указанием того пути, которым мы при этом шли. Возьмем произвольную точку A, лишенную какой-либо симметрии. Формально такая точка, как и всякая асимметрическая фигура обладает бесконечным множеством произвольно направленных осей симметрии первого

[1] В этой реформе понятия эвклидовой точки содержится наша основная идея вывода однородных непрерывных сред. В цитированных ниже немецких работах идея эта умышленно была скрыта нами в математических символах и в совершенно явной форме высказывается здесь впервые.

порядка, ибо, поворачивая такую фигуру около произвольной прямой на угол в 360°, мы приводим фигуру в совмещение с ней самой. Симметрия нашей точки, следовательно, относится к 32 классу симметрии кристаллов и обозначается C_1 (циклическая симметрия с осями 1-го порядка). Подвергнем теперь нашу точку всевозможным непрерывным трансляциям параллельно трем произвольно выбранным и не лежащим в одной плоскости осями трансляций (T'''). При этих условиях наша точка побывает во всех точках пока еще эвклидова пространства и сообщит им по нашему приказанию свою собственную симметрию. Теперь эвклидово пространство нами превращено в однородную непрерывную среду, которую мы обозначим в соответствии с методом ее получения $C_1\ T'''$. Для того, чтобы понять всю глубину различия выведенной нами непрерывной среды от эвклидова пространства и от соответствующего нашему случаю кристаллографической группы Шенфлиса C_1^1, обратимся к рассмотрению двумерной статистической модели нашей среды (фиг. 2). Исходная точка A изображена здесь запятой, чтобы показать отсутствие в ней элементов симметрии; припишем далее запятой «лицо» и «изнанку», чтобы не возникало никаких сомнений относительно отсутствия в ней плоскости семметрии, совпадающей с плоскостью чертежа. Кроме этой точки A изобразим на плоскости множество других равноценных ей точек, которые также обозначим запятыми, тождественными первой и расположенными ей параллельно. Плотность распределения точек или количество точек, приходящихся на единицу поверхности, пусть будет во всех местах постоянна, или, если уже быть совсем строгим, пусть эта плотность меняется от места к месту, следуя закону распределения Гаусса. Пусть далее наши структурные единицы и средние расстояния между ними будут так малы, что мы не в состоянии исследовать их индивидуально, но можем получать только суммарные впечатления от их бытия. Покажем, что при этих данных наша среда может служить прекрасной моделью двумерной анизотропной однородной и непрерывной среды. Представим себе, что некоторое существо движется в нашей среде вдоль оси T_1 по стрелке, встречая на своем пути множество запятых со стороны их выпуклости. Наше существо получит от этих встреч некоторое суммарное ощущение; если теперь то же существо пойдет обратно, то впечатление его от встреч с запятыми будет уже иным, ибо оно будет встречаться постоянно только с острыми концами запятых. Для нашего существа среда будет поэтому анизотропной. Так как очень малых расстоя-



Фиг. 2.

ний наше существо, по условию, оценивать не может, то среда будет представляться ему вполне непрерывной; а так как количество встреч с запятыми в единицу времени при постоянной скорости движения нашего существа будет тоже постоянным, то среда будет для него вполне однородной. Мы видим теперь в чем состоит разница между нашим пространством и пространством Эвклида. Эвклидово пространство однородно и изотропно; наше — однородно и анизотропно. Эвклидово пространство только частный случай наших сред. Отличие наших сред от «кристаллографических» сред Шенфлиса и Федорова более тонко и требует особого рассмотрения. Представим себе плоскую сетку (фиг. 3), составленную из тех же запятых, но в предположении, что элементарные трансляции теперь не бесконечно малы. Если сохранить все предыдущие условия, то наше существо, очевидно, не найдет разницы между обоими пространствами: в обоих случаях пространство будет для него вполне непрерывным и анизотропным. Для того же, чтобы установить эту разницу необходимо применить иной метод. В данном случае следовало бы применить, напр., такой метод, который был бы аналогичен исследованию кристаллов рентгеновыми лучами; тогда разница вскрылась бы со всей очевидностью. Наша среда вела бы себя как жидкий кристалл, а «кристаллографическая» — как обыкновенный кристалл. Из этого примера мы видим, что подобно тому как нельзя мыслить себе вещь, как «вещь в себе», т. е. вне зависимости ее от других вещей и от нас самих, так в равной мере нельзя говорить о среде «вообще», т. е. вне зависимости от того метода, которым среда изучается.



Фиг. 3.

Мы получили первый случай непрерывных анизотропных сред, подвергая точку, обладающую симметрией C_1, непрерывным трансляциям около трех, не лежащих в одной плоскости, осей. Совершенно таким же образом можно получить из всякой другой точки с иной симметрией другие пространства. В таблице 2 даны все такие точечные группы, выведенные Гесселем в 1830 г. Если обозначим в общем виде симметрию исходной точки символом группы G, то символ выводимой из нее путем непрерывных трансляций пространственной группы будет GT'''. Число точечных групп G, выведенных Гесселем, бесконечно велико, следовательно и однородных непрерывных пространственных групп существует также бесконечное множество.

Но подвергать точечную группу непрерывным трансляциям около трех осей — не единственный прием вывода непрерывных групп.

Таблица 2

Точечные группы

Название точечных групп	Тип A	Тип B	Элементы симметрии
Циклические	Cn	C_∞	L_n; L_∞
Диэдрические	Dn	D_∞	$L_n\,n\,L_2$; $L_\infty \infty L_2$
Тетраэдрическая	T	—	$3L_2\ 4L_3$
Октаэдрическая	O	—	$3L_4\ 4L_3\ 6L_2$
Икосаэдрическая	J	—	$6L_5\ 10L_3\ 15L_2$
Шаровая	—	K	∞L_∞
Циклические	S_{2n}	—	$\overline{L}_{2n}$
	C_n^h	C_∞^h	L_nP; $L_\infty P$
	C_n^v	C_∞^v	$L_n\,n\,P$; $L_\infty \infty P$
Диэдрические	D_n^h	D_∞^h	$L_n\,n\,L_2\,(n+1)\,PC$; $L_\infty \infty L_2 \infty PC$[1]
	D_n^d	—	$L_n\,nL_2\,nP$
Тетраэдрические	T^d	—	$3L_4\ 4L_3\ 6P$
	T^h	—	$3L_2\ 4L_3\ 3PC$
Октаэдрическая	O^h	—	$3L_4\ 4L_3\ 6L_2\ 9PC$
Икосаэдрическая	J^h	—	$6L_5\ 10L_3\ 15L_2\ 15PC$
Шаровая	—	K^h	$\infty L_\infty \infty PC$.

Примечание: $n > o$ — целое число; h — горизонтальная плоскость симметрии; v — вертикальные плоскости симметрии; d — диагональные плоскости симметрии.

Математическое исследование этого вопроса показывает, что так называемые циклические C_n и диэдрические D_n точечные группы дают также непрерывные пространственные группы, если мы подвергнем их сначала непрерывным трансляциям около двух координатных осей и затем винтовому движению параллельно третьей оси перпендикулярной к плоскости трансляций.

Совокупность таких тройных операций мы обозначаем символом $T''L'$, а два бесконечных ряда новых пространственных групп — символами $C_nT''L'$ и $D_nT''L'$. Наконец к этому многообразию пространственных групп мы должны прибавить еще одну, стоящую совершенно особняком группу, возни-

[1] При нечетном n в этой формуле отсутствует C

кающую из простейшей точечной группы C_1, если подвергнуть ее винтовым движениям параллельно трем, не лежащим в одной плоскости осями. Эту группу мы называем C_1L''' или просто L'''. Этим и исчерпываются все непрерывные однородные группы. Полный их перечень мы даем на следующей таблице III.

Таблица 3

Непрерывные трехмерные группы

Комбинируемые примитивные группы / точечные группы	T'''	$T''L'$	L'''
C_n	C_nT'''	$C_n T'' L'$	$C_1 L'''$
	$C_\infty T'''$	—	—
D_n	D_nT'''	$D_n T'' L'$	—
	$D_\infty T'''$	—	—
T	$T.T'''$	—	—
O	OT'''	—	—
J	JT'''	—	—
K	KT'''	—	—
S_{2n}	$S_{2n}T'''$	=	—
C_n^v	$C_n^v T'''$	—	—
	$C_\infty^v T'''$	—	—
C_n^h	$C_n^h T'''$	—	—
	$C_\infty^h T'''$	—	—
D_n^h	$D_n^h T'''$	—	—
	$D_\infty^h T'''$	—	—
D_n^d	$D_n^d T'''$	—	—
	—	—	—
T^d	$T^d T'''$	—	—
T^h	$T^h T'''$	—	—
O^h	$O^h T'''$	—	—
J^h	$J^h T''''$	—	—
K^h	$K^h T'''$	—	—

Из этой таблицы мы видим, что существует всего 9 бесконечных рядов пространственных групп: 1) $C_n T'''$, 2) $D_n T'''$, 3) $S_{2n} T'''$, 4) $C_h^e T'''$, 5) $C_n^h T'''$, 6) $D_n T'''$, 7) $D_n^d T'''$, 8) $C_n T'' L'$ и 9) $D_n T'' L'$ и 10 особенных групп: 1) TT''', 2) OT''', 3) JT''', 4) KT''', 5) $T^d T'''$, 6) $T^h T'''$, 7) $O^h T'''$, 8) $J^h T'''$, 9) $K^h T'''$, 10) L'''. Сравнивая мир непрерывных групп с миром групп прерывных, коих существует, как известно, всего 230, мы видим, что первый мир в бесконечное число раз более разнообразен, чем второй.

Нам надлежит теперь показать, в какой мере выдуманный нами новый мир пространств отвечает действительному и какое, в частности, отношение наши «некристаллографические» пространства имеют к кристаллам. Начнем с простейшего случая. Дан кристалл кубической системы, напр., каменная соль. Нас интересует симметрия этого кристалла в отношении скорости распространения света внутри него. Чтобы определить эту симметрию, вообразим себе внутри кристаллической среды светящуюся точку. Так как скорость света по всем направлениям в каменной соли одинакова, и сами лучи имеют цилиндрическую симметрию, то выбранная нами точка должна иметь симметрию шара, а так как точка может быть выбрана совершенно произвольно, то среда непрерывна. Отсюда искомая симметрия среды есть $K^h T'''$ или, просто, симметрия эвклидового пространства. Мы разобрали здесь всем хорошо известный факт, но осветили его совершенно иначе, чем это делалось до сих пор, показав, что явления кристаллооптики могут быть описываемы в терминах геометрической кристаллографии, что «некристаллографическая» (по Шенфлису) симметрия свойственна кристаллам.

Следующие примеры должны показать это еще лучше. Возьмем опять кристалл кубической системы, но обладающий способностью вращать плоскость поляризации, напр., $NaClO_3$. Если в данном случае вопрос будет итти опять о скорости света, то симметрия $NaClO_3$ будет та же — $K^h T'''$. Если же нас будет интересовать отношение кристаллического вещества к поляризованному монохроматическому свету, то симметрия среды будет иной. В самом деле, возьмем произвольную точку внутри кристалла и опишем около нее сферу определенного радиуса и будем исследовать симметрию этой сферы, пропуская через нее тонкий пучок поляризованных лучей по всевозможным направлениям, но обязательно так, чтобы этот пучок проходил через центр сферы. Во-первых, мы увидим, что при прохождении лучей через кристалл плоскость поляризации всегда будет поворачиваться, напр., вправо независимо от направления луча на один и тот же угол. Отсюда следует, что наша точка не имеет плоскостей сим-

метрии. Во-вторых, поворачивая шар около луча на любой угол, мы не заметим никакого влияния этих поворотов на поляризованный луч; это означает, что всякий луч есть ось симметрии бесконечного порядка. Отсюда следует, что наш шар имеет симметрию группы K. Шар, отвечающий группе K, не имеет плоскостей симметрии в отличие от шара K^h, который имеет бесконечное множество плоскостей симметрии. Значит ли это, что центр шара обладает той же симметрией. Нет, не всегда, ибо при таком способе рассмотрения, т. е. при анализе симметрии конечных фигур, нельзя отличить простые оси симметрии бесконечного порядка от винтовых осей симметрии бесконечного порядка. Если бы оси оказались простыми (не винтовыми), то симметрия точки была бы K, а соответствующая пространственная группа была бы KT'''. В противном случае среда должна быть причислена к группе L''', как единственной, которая содержит бесконечное множество винтовых осей бесконечного порядка всевозможных направлений. Итак остается решить вопрос, являются ли оси винтовыми или простыми. Если данная среда обладает винтовыми осями бесконечного порядка, то в ней существуют вполне определенные конечные трансляции, равные «ходу» винтовых осей. Если речь идет о вращении плоскости поляризации, то этот «ход» имеется налицо в виде тех отрезков пути луча, при которых плоскость поляризации поворачивается на 360°. Эти отрезки, которые можно было бы назвать трансляциями вращения плоскости поляризации, суть обратные величины так называемой вращательной способности кристалла, измеряемой углом поворота плоскости поляризации при прохождении лучом пути в один миллиметр внутри кристалла. Итак вопрос о симметрии $NaClO_3$ по отношению к явлению прохождения через него поляризованных лучей решен — соответствующая группа есть L'''. Мы нарочно остановились здесь так подробно на этом случае потому, что группы K и L''' являются особенно трудными для понимания. Этим, вероятно, объясняется почему даже в настоящее время находятся лица из среды специально занимающихся кристаллографией, для которых сам факт существования этих групп представляется не доказанным, и это несмотря на то, что группа K была установлена Гесселем в 1830 году и вторично открыта через пятьдесят лет Пьером Кюри, а группа L''' была введена Жорданом в 1868 г. Между тем представить себе шар без плоскостей симметрии (группа K), по существу не труднее, чем представить себе куб без плоскостей симметрии (кубические кристаллы сильвина с косыми фигурами вытравления). В равной мере представить себе пространство, «заполненное» бесконечно тонкими и бесконечно длинными винтиками, расположенными своими осями по всевозможным направлениям,

не сложнее, чем представить себе обыкновенное эвклидово пространство, состоящее из бесконечного множества «цилиндрических прямых».

Переходим теперь к кристаллам одноосным, не вращающим плоскость поляризации. Нет особой надобности доказывать, что каждая точка такого кристалла в отношении оптических явлений имеет симметрию эллипсоида вращения или иначе симметрию группы D^h_∞. Соответствующая пространственная группа будет $D^h_\infty T'''$.

Одноосные кристаллы, вращающие плоскость поляризации, имеют совершенно иную симметрию. Прежде всего рассуждением, аналогичным тому, которое имело место по отношению к кристаллам кубической системы, вращающим плоскость поляризации, легко установить наличие винтовых осей, параллельных оптической оси. Далее, из того обстоятельства, что винтовые оси эти не полярны, следует, что в среде содержатся оси 2-го порядка, перпендикулярные винтовым осям. В результате имеем для нашей среды группу $D_1T''L'$.

Далее укажем, что симметрия двуосных кристаллов, не вращающих плоскость поляризации, соответствует группе D_2^hT'''; это означает, что каждая точка нашей среды обладает тремя взаимноперпендикулярными осями симметрии второго порядка, тремя плоскостями симметрии, проходящими через эти оси, и центром симметрии или иначе принадлежат к голоэдрии ромбической системы.

До сих пор мы приводили примеры того, как следует определять симметрию кристаллов в отношении тех или иных явлений, которые в нем происходят, причем никаких особых последствий из этого не вытекало. Мы не могли предсказывать как должно протекать явление, если кристалл будет иметь ту или иную симметрию. На следующем примере мы покажем, как такие предсказания могут делаться. Возьмем двуосный кристалл, вращающий плоскость поляризации. Его оптическая симметрия будет D_2T'''. Оптические оси кристалла не являются в данном случае винтовыми осями симметрии, ибо наличие двух таких пересекающих осей требует присутствия бесконечного множества винтовых осей всевозможных направлений, что противоречит условию. Но если оптические оси не являются в данном случае винтовыми осями, то угол вращения плоскости поляризации не пропорционален пройденному лучом пути. Этот вывод можно сочетать с однородностью кристалла только единственным образом: необходимо допустить, что приращение угла вращения, отвечающее одному и тому же приращению пути луча, меняется периодически по тому или иному закону в пределах между двумя определенными положительными величинами. Проверка этого пред-

сказания, очевидно, будет и проверкой самой теории. К сожалению в настоящее время мы не располагаем достаточно точными методами измерения угла вращения плоскости поляризации, поэтому такая проверка есть дело будущего.

До сих пор мы говорили только об оптических свойствах кристаллов, но кристалл ведет себя как непрерывная среда также и в отношении многих других физических явлений; в частности упругие свойства кристаллов можно рассматривать как свойства непрерывных сред. Так для кристаллов кубической системы явления упругости имеют симметрию O^hT''', для кристаллов тетрагональной системы — симметрию D_4^hT''' и т. д.

Теперь мы переходим к рассмотрению симметрии таких сред, которые не могут быть причислены к кристаллам, но и не могут рассматриваться как аморфные тела. К такого рода телам принадлежат, как известно, так называемые жидкие кристаллы. Оптические свойства жидких кристаллов вполне отвечают оптическим свойствам одноосных кристаллов, поэтому соответствующая пространственная группа будет D_∞^hT'''. С точки зрения теории симметрии к этой же категории сред должны быть отнесены многие природные тела волокнистой структуры, как то: шелк, нервы, мускулы, волосы, рог и т. д. По поводу некристаллических, но явно симметрических образований, встречающихся в растительном и животном мире, нам хотелось бы здесь высказать одно априорное соображение, напрашивающееся само собой. Всем хорошо известно, что в определенных случаях полезно и даже совершенно необходимо рассматривать кристаллы как среды прерывистые или как системы правильных систем точек — атомов. Втиснутые в пространственные решетки атомы и молекулы таких кристаллов неизбежно, в силу только одной геометрической необходимости, должны обладать так называемой кристаллографической симметрией, запрещающей пятерные оси симметрии и оси симметрии порядка выше шести. Между тем, это запрещение отнюдь не распространяется на атомы и молекулы, не связанные в кристаллические решетки. Наоборот, мы имеем все основания допускать, хотя бы из периодического закона, что пятерная и семерная симметрия молекул является вполне допустимой для молекул, находящихся в жидкостях и газах. Далее мы не имеем никаких оснований лишать наши молекулы присущего всем молекулам свойства при известных условиях, напр., при понижении температуры, стремиться к образованию «жестких» структур. Затем мы ни в коем случае не можем взять на себя смелость утверждать, что всякая молекула с некристаллографической симметрией может быть «втиснута» в ту или иную пространственную решетку и тем

самым может быть лишена присущей ей симметрии. Гораздо естественнее предположить, что по меньшей мере иногда этого сделать нельзя. Но какие же «жесткие» структуры в таком случае могут образовать эти молекулы? Очевидно это будут или вполне аморфные среды или среды статистически анизотропные по терминологии Вейссенберга. В последнем случае пятерная или иная некристаллографическая симметрия молекул будет присуща и всей среде. Морские звезды, цветы и многие другие представители живой природы наилучшим образом отвечают высказанным нами выше соображениям. Подобно тому как внешняя форма кристаллов отображает решетчатую их структуру, так равно и внешняя форма организмов отображает их статистическую анизотропию. Здесь мы должны со всей определенностью отмежеваться от той многочисленной группы ученых, совершенно не знакомых с кристаллографией, но почему то очень любящих или ссылаться на нее, когда она им полезна, или критиковать ее тогда, когда по их мнению она им неприятна, — ученых, слишком далеко заходящих в аналогиях между живыми организмами и кристаллами. Необходимо помнить, что кристалл в первую очередь есть однородная среда и лишь в самую последнюю очередь — организованный индивидуум; организм есть в первую очередь индивидуум и лишь в самую последнюю очередь среда, в которой лишь самые незначительные части могут рассматриваться как однородные среды. Кристаллографическому изучению в духе изложенной теории поэтому в первую очередь подлежат лишь ткани организмов или зародышевые организмы; последние уже изучаются с этой точки зрения немецким менералогом Ринне.

К анизотропным однородным средам относятся также кристаллы и аморфные тела с наведенной анизотропией, например, растянутые или сжатые желатина, резина и т. д. В оптическом отношении такие среды ничем не отличаются от одноосных кристаллов (группа $D^h_\infty T'''$). Кристаллооптику поэтому правильнее было бы называть оптикой анизотропных однородных сред. Опыт показывает, что цилиндр, изготовленный из желатины и подвергнутый кручению около своей оси, в оптическом отношении не отличается от одноосных кристаллов, вращающих плоскость поляризации, напр., от кварца. Соответствующая группа для таких сред будет поэтому $D_1 T'''$.

Примером кристаллов с наведенной анизотропией может служить подвергнутая кручению каменная соль. Оптические свойства ее будут совпадать с оптическими свойствами закрученной желатины.

Наведенная анизотропия может быть сообщена аморфным и кристаллическим телам не только чисто механическим на них воздействием, но и

иными путями. Так, помещая стекло в однородное электрическое поле, мы делаем его анизотропным с симметрией группы $C_\infty^v T'''$. В этой группе отсутствуют центры симметрии. Известно, что кристаллы, не имеющие центра симметрии, пьезоэлектричны, поэтому мы вправе ожидать, что и аморфные тела в этих условиях будут пьезоэлектричны. Мы говорим «ожидать» потому, что утверждать этого только из кристаллографических соображений ни в коем случае нельзя. Опыты Мейсснера и наши показали, что это явление на самом деле имеет место. Совершенно так же можно «ожидать», что аморфное тело или оптически изотропный кристалл, находящиеся в однородном электрическом поле, будут обладать двойным лучепреломлением. Всем хорошо известно, что это ожидание оправдывается в так называемом явлении Керра. С равным правом можно ожидать, что аморфное тело, напр., стекло, помещенное в поле световых рентгеновых или гамма-лучей, будет пьезоэлектрично. Так ли оно происходит на самом деле, решит опыт, который, сколько нам известно, до сих пор сделан не был.

До сих пор в наших примерах фигурировали исключительно материальные среды: кристаллы и аморфные тела; между тем в природе существует большое разнообразие не материальных, а энергетических анизотропных средин. Таковы, например, однородное электрическое поле, рассматриваемое как совокупность силовых трубок и обладающее симметрией $C_\infty^v T'''$, и поле световых лучей, имеющее ту же симметрию. Главные оси обоих полей полярны. Магнитное поле, рассматриваемое как совокупность амперовых токов, имеет симметрию $C_\infty^h T'''$. В отличие от электрического поля магнитное поле не обладает плоскостями симметрии, параллельными главной оси, но обладает плоскостями симметрии, перпендикулярными главной оси. Поле поляризованных лучей, рассматриваемое как совокупность бесконечно тонких лент с условием, что в них можно различать направление «вперед» и «назад», обладает симметрией $C_2^v T'''$. Ось симметрии второго порядка в этом поле совпадает с направлением лучей и является полярной осью. Можно было бы привести большое количество примеров энергетических анизотропных полей, но и сказанного вполне достаточно для того, чтобы составить себе об этом предмете вполне ясное представление.

Чтобы вполне закончить рассмотрение анизотропных однородных сред, отметим еще одну в высшей степени интересную их категорию; я разумею средины из двух или нескольких энергетических полей. Пользуясь теорией сочетаний, можно придумать весьма большое количество таких полей. Так, например, комбинируя магнитное поле с полем поляризованных лучей, получим новое поле с симметрией $C_2 T'' L'$, до сих пор в наших примерах не

встречавшееся и вполне отвечающее симметрии явления магнитного вращения плоскости поляризации. В отличие от однородных кристаллов, вращающих плоскость поляризации, наша комбинированная среда обладает осью, концы которой отличаются друг от друга как предмет и его зеркальное изображение. Если луч света идет по направлению поля, то плоскость поляризации поворачивается вправо; если луч направлен в противоположную сторону, то плоскость поляризации поворачиваетея влево.

На этом мы заканчиваем рассмотрение непрерывных групп. Однако этими группами и 230 группами прерывных сред не исчерпывается все многообразие однородных трехмерных пространств. Можно представить себе такие трехмерные среды, которые вполне непрерывны по одним направлениям и прерывны по другим. Мы поставили себе задачей вывести все такие «гибридные» группы, при чем оказалось, что все эти группы могут быть получены из так называемых сеточных и цепочечных групп. Под сеточными группами разумеют двумерные прерывистые группы, выведенные Ц. Херманном. Цепочечные группы выведены Александером и Херрманном. Сеточных групп оказалось 80, а цепочечных — бесконечное множество. Примером фигуры, обладающей симметрией сеточных групп, могут служить рисунки обоев, тканей и т. д. в том, однако, случае, если повторяющиеся вдоль одной плоскости фигуры сами по себе не двумерны, а трехмерны. Примером фигуры, обладающей симметрией цепочечных групп, может служить цепочка из колец, нить одинаковых бус, бордюры обоев и т. д. Математическое исследование поставленного нами вопроса показало, что из каждой сеточной и цепочечной группы можно получить всего одну пространственную гибридную группу. Для этого сеточные группы N нужно подвергнуть одной непрерывной трансляции T', а цепочечные группы R следует подвергнуть двум непрерывным трансляциям T''. Символы гибридных групп поэтому будут NT' и RT''. Можно при желании привести множество примеров гибридных средин; мы ограничимся, однако, только наиболее характерными. Стопа бумаги прерывиста в направлении, перпендикулярном к листам, и непрерывна во всех направлениях в плоскости листа. Символ ее группы будет $D^h_\infty(T_a T'')$. Представим себе теперь среду, сложенную из пластин трех сортов: A, B, C. Если эти пластины расположены в порядке $ABC\ ABC\ ABC\ldots$, то система обладает симметрией групп $C^h_\infty(T_a T'')$. Ось симметрии бесконечного порядка в данном случае полярна, ибо направление $ABCAB\ldots$ отличается от противоположного направления $CBACB\ldots$ Надо ожидать, что материальные средины этого порядка так или иначе могут проявлять свою полярность. Так обще-

известен факт, что столбики, составленные из чередующихся слоев двух металлов и жидкости, заряжены по концам электричеством противоположных знаков. Надо думать также, что тонкослойные изоляторы, составленные из трех диэлектриков, будут пьезоэлектричны. К гибридным же пространствам должно быть отнесено поле стоячих звуковых, световых и других волн. Три взаимноперпендикулярных поля стоячих волн образуют пространственную решетку, не отличающуюся по симметрии от решетки кристалла кубической системы, и являются в совокупности как бы энергетической моделью материального кристалла. На этом мы заканчиваем обзор «некристаллографических» однородных сред и приводим ниже выводы из всего изложенного.

1. Геометрическая кристаллография вступает во второй фазис своего исторического развития, характеризуемый усиленным интересом к идее непрерывности, в противовес господствовавшему ранее направлению рассматривать кристалл исключительно как среду прерывистую.

2. Чем скорее кристаллография пройдет этот фазис своего развития, тем скорее будет создана новая кристаллография на основе синтеза обеих точек зрения.

3. Понятие непрерывности кристаллических и некристаллических средин требует усовершенствования основных понятий геометрии. Точка лишается ее универсальной шаровой симметрии и ставится в зависимость от окружающих ее точек.

4. Симметрия непрерывных и гибридных сред бесконечно разнообразнее симметрии прерывистых сред.

5. Нельзя говорить о симметрии кристалла «вообще», т. е. безотносительно к тому или иному явлению.

6. Симметрия кристаллов в такой же мере соответствует симметрии непрерывных как и прерывных групп.

7. Статистически непрерывные группы могут быть описываемы в терминах непрерывных групп.

8. Непрерывные и гибридные среды могут быть материальными, энергетическими и смешанными.

9. Изучение симметрии сред помогает предсказанию новых физических явлений.

10. Симметрия организмов включается в число объектов изучения кристаллографии.

8 XII 1931 Ленинград, Академия Наук, Минералогический институт

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ ТОНКИХ СЛОЕВ САЛОЛА И БЕНЗОФЕНОНА

И. В. КРОТОВА

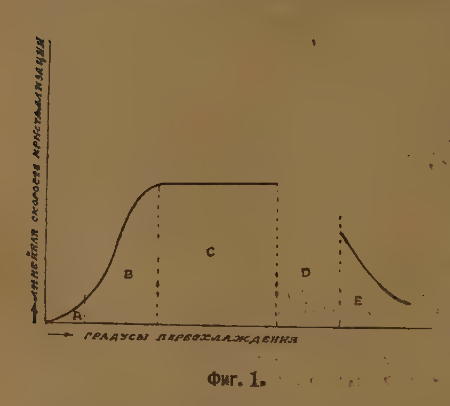
(*Представлено академиком* В. А. Кистяковским)

§ 1. Скорость процесса кристаллизации

По Тамману[1] скорость процесса кристаллизации определяется скоростями двух одновременно совершающихся процессов: 1) образования кристаллических центров и 2) роста образовавшихся кристаллических центров. Самопроизвольная способность к кристаллизации переохлажденных жидкостей характеризуется: а) числом самопроизвольно образующихся при данной температуре центров кристаллизации в единице веса переохлажденной жидкости за единицу времени, б) линейной скоростью кристаллизации или расстоянием, на которое перемещается в единицу времени граница между кристаллами и жидкостью (стр. 148). Оказывается, что с переохлаждением расплавленного вещества ниже температуры его плавления число самопроизвольно образующихся центров кристаллизации за единицу времени увеличивается до некоторого максимума; при дальнейшем переохлаждении скорость образования центров кристаллизации резко уменьшается. Таким образом, для каждого кристаллизующегося из жидкого состояния, переохлажденного ниже температуры его плавления вещества существует свой максимум скорости образования кристаллических центров. Температура максимума скорости образования кристаллических центров не зависит от количества взятого вещества. Различные примеси влияют на упомянутый максимум различно: некоторые смещают температуру максимума, некоторые влияют только на количество кристаллических центров, отвечающих максимуму. Нерастворимые порошки, подобно примесям растворимым, влияют на скорость образования кристаллических центров различно.

[1] Gustav Tamman. Kristallisieren und Schmelzen. Ein Betrag zur Lehre der Änderungen des Aggregatszustandes. Verlag von A. Barth. Lpz., 1903, SS. 131—162.

Скорость образования кристаллических центров Тамманом определялась, например, для бетола следующим образом (стр. 150): капля расплавленного бетола наливалась на нагретую стеклянную пластинку, прикрывалась другой стеклянной пластинкой, потом охлаждалась до температуры комнаты. При этом образовывались в скрытом виде кристаллические центры, которые становились видимыми после нагревания над лампой в течение нескольких минут стекол с заключенным между ними бетолом; при повышении температуры возрастала линейная скорость кристаллизации и кристаллические центры вырастали до таких размеров, что представлялось возможным их считать. Вновь образовавшиеся кристаллические центры не принимались во внимание, так как их можно было отличить по меньшим размерам. Что касается линейной скорости кристаллизации, то Тамманом была найдена зависимость между градусами переохлаждения и линейной скоростью кристаллизации (KG), выражаемая графически так, как это изображено на фиг. 1.



Фиг. 1.

Подобная зависимость KG от градусов переохлаждения имеет место для всех веществ, для которых KG больше 3 мм в 1 мин. В некотором температурном интервале переохлаждения, приблизительно от 20—30° C ниже температуры плавления вещества, KG постоянно. Указанная выше диаграмма получена изучением при различных температурах кристаллизации различных веществ в U-образных трубках.

В температурной области A, от 1 до 5° ниже температуры плавления, образуются от тех мест, к которым прикоснулись твердым кристалликом изучаемого вещества, большие, богатые плоскостями кристаллы, оси которых расположены весьма различно по отношению к оси трубки; здесь получаются значения KG, мало взаимно согласующиеся. Термические конвекционные токи и примеси посторонних веществ весьма сильно влияют на KG и на форму кристаллов. В более узких трубках, в которых труднее образуются конвекционные токи, KG значительно меньше, чем в более широких трубках. Примеси при кристаллизации собираются в самой верхней части трубки; это вызывает понижение температуры плавления и кристаллизация в конце концов пре-

кращается. Указанные обстоятельства делают измерения в области A невозможными.

В области B, приблизительно от 5 до 30° ниже температуры плавления, образуется в трубке некоторое количество параллельно оси трубки расположенных колонок, которые интенсивнее всего растут на концах, что приводит к образованию длинных кристаллических нитей. В начале области B кристаллические нити лежат исключительно на периферических частях жидкого цилиндра, от которых теплота кристаллизации отводится быстрее, чем от центральных частей. При больших KG здесь растут одна или несколько кристаллических нитей, расположенных спиралеобразно вдоль стенок трубки.

В области D, при таких условиях отвода теплоты, которые имеют место в стеклянных трубках, не наблюдается стационарная KG.

В температурной области C скорость кристаллизации KG является независимой от температуры окружающей трубку среды. KG для области E была измерена F. Dreyer'ом в слое в 0.1 м толщиной, между двумя покровными стеклами (Deckgläschen). Посредством окулярного микрометра определялось расстояние границы между кристаллами и жидкостью от метки, после того как посредством подходящей обработки препарата в последнем были образованы кристаллизационные центры (стр. 144).

В области, где KG с падением температуры повышается или не изменяется, примеси уменьшают KG.

Из изложенного выше вытекает такое заключение, что для каждого кристаллизующегося жидкого вещества, переохлажденного ниже температуры его плавления, характерной константой является максимальная линейная скорость кристаллизации. Эта максимальная линейная скорость кристаллизации зависит от природы вещества и сильно изменяется от примесей.

Для бензофенона и салола Тамманом получены следующие данные:

Вещество	Темпер. плавл.	Темп. ванны и KG в мм в мин.	Кристалл. сист.
Бензофенон I	48.0°	25°; 55 ± 0.3	Ромбическая
		0°; 55.0 ± 0.5	
		20°; 52.5 ± 0.5	
Бензофенон II	25.0°	от 5 до—5° 2.40 ± 0.1	Монокл.
Салол I	42.0°	20°; 3.46 ± 0.15	Ромбич.
		10°; 3.48 ± 0.06	
Салол II	38.8°	20°; 1.0 мм	
		10°; 1.0 мм	

§ 2. Цель настоящего исследования

Целью настоящего исследования является изучение кристаллизации тонких слоев расплавленного бензофенона и салола и определение скорости подобной кристаллизации на различных материалах.

§ 3. Экспериментальные методы

Салол или бензофенон расплавлялся на электрической плите в фарфоровой чашке. Фарфоровая чашка с жидким салолом или бензофеноном снималась с электрической плиты и охлаждалась до температуры комнаты. Затем охлажденная до температуры комнаты жидкость выливалась на ту или другую поверхность. При этом фарфоровая чашка и поверхности, на которые выливались расплавленные салол и бензофенон, тщательно освобождались от пыли обдуванием с помощью груши, так как специальным опытом было обнаружено, что пылинки, попадая в переохлажденный салол или бензофенон, вызывают немедленную кристаллизацию. При наливании переохлажденного вещества из чашки на изучаемую поверхность кристаллизация сама по себе не возникает, так как происходящее при этом встряхивание весьма слабо.

Кристаллизация изучалась на следующих поверхностях; медь полированная, медь шероховатая (обраб. нажд. бумагой № 3), никель полированный (нажд. бум. 00), никкель шероховатый (нажд. бумага № 3), стекло полированное (обыкновенная очищенная негативная пластинка), стекло шероховатое (обраб. нажд. бумагой № 3), дерево с гладкой поверхностью, грубое, плохо выструганное, бумага рисовальная плотная, бумага глянцевая. Металлические и стеклянные поверхности сначала очищались бензолом, а потом спиртом. Дерево непосредственно перед опытом очищалось наждачной бумагой. Каждая поверхность перед наливанием расплавленного салола или бензофенона освобождалась от пыли так,как указано выше.

Стеклянные плоские пластинки приготовлялись из фотографических пластинок, для чего эмульсия с них тщательно удалялась, и пластинки затем последовательно промывались в аммиаке, азотной кислоте и воде.

Сначала изучалось влияние той или другой поверхности на процесс самопроизвольной кристаллизации. Вылитые на указанные выше поверхности большие капли расплавленного салола или бензофенона, охлажденного до комнатной температуры, оставлялись некоторое время на изучаемых

поверхностях, причем производилось наблюдение, зарождаются или нет центры кристаллизации внутри капель и через какое время после выливания на поверхность появляются внутри капель указанные центры.

Линейная скорость кристаллизации на той или иной поверхности изучалась следующим образом. После помещения капли расплавленного салола или бензофенона на изучаемую поверхность, сверху на каплю помещалось плоское стекло (очищенная от эмульсии фотографическая пластинка); получался между изучаемой поверхностью и стеклянной пластинкой весьма тонкий слой вещества. Через некоторое время после накладывания стеклянной пластинки замечалось появление, чаще всего по краям, центров кристаллизации, которые в дальнейшем начинали расти, причем общее количество получающихся кристаллов оставалось равным числу первоначально образовавшихся центров кристаллизации. Линейное перемещение границы между кристаллом и жидкостью определялось по бумажной прямой ленте с нанесенными на ней на равных расстояниях друг от друга тонкими черточками. Бумажная лента всегда накладывалась таким образом, что ее сторона, по которой отсчитывались расстояния, проходила через центр кристалла. По секундомеру точно отмечалось то время, в течение которого граница между кристаллом и жидкостью переместится на отрезок, заключающийся между черточками, нанесенными на бумажной полоске. Такой метод определения линейной скорости кристаллизации был применен и для салола и для бензофенона. Для салола был применен, кроме того, еще следующий метод изучения скорости кристаллизации (на стекле). Заключенный между двумя пластинками тонкий слой салола с происходящей в этом слое кристаллизацией служил негативом, с которого через определенные промежутки времени снимались на светочувствительную бумагу изображения, проявлявшиеся дальше обычным путем. Освещение при получении снимка с кристаллизующегося между пластинками салола длилось в течение трех секунд. За такой короткий промежуток времени граница между кристаллами и жидкостью в салоле перемещалась настолько мало, что размазанных, неясных контуров не получалось. Подобный способ для бензофенона применить, конечно, не представлялось возможным, в виду значительной линейной скорости кристаллизации бензофенона. Для определения промежутков времени между двумя снимками пользовались двумя секундомерами. В тот момент, когда прекращали освещение через «негатив», останавливался один секундомер и пускался второй. При следующем снимке второй секундомер останавливался в конце печатания через «негатив» и первый секундомер опять пускался. Таким образом остановленный секундомер показывал точно промежуток

времени между двумя моментами процесса кристаллизации, запечатлеваемыми на светочувствительной бумаге.

Для нашей работы мы имели два препарата салола с одинаковой температурой плавления 41.5° С, но различной чистоты, судя по внешнему виду. Один препарат «Гослаборснабжения» имел темноватый оттенок, другой «Kahlbaum'a» был совершенно белого цвета. Препарат бензофенона фирмы «Kahlbaum» имел температуру плавления 47°, причем эта температура плавления не держалась строго постоянной; температура при плавлении бензофенона медленно возрастала от 47° — начала плавления.

§ 4. Экспериментальные результаты работы.

Опыты были произведены при комнатной температуре (20° С).

1) На полированной поверхности меди кристаллизации в налитой капле переохлажденного салола не было в течение 100 мин. В налитой капле бензофенона не было кристаллизации в течение 45 мин. Далеее опыт был прерван.

2) На поверхности шероховатой меди в большинстве случаев налитые капли салола бензофенона кристаллизовались немедленно. Только несколько раз удалось наблюдать капли салола, которые еще не кристаллизовались в течение 100 мин. и капли бензофенона, еще не кристаллизовавшиеся в течение 45 мин.

3) На поверхности полированного и шероховатого никеля расплавленный салол не кристаллизовался в течение 100 мин. и расплавленный бензофенон не кристаллизовался в течение 45 мин. Далее опыт был прерван.

4) На грубой поверхности дерева салол и бензофенон немедленно закристаллизовались. На гладкой поверхности дерева кристаллизация салола не происходила в течение 7 мин. и бензофенона в течение 2.5 мин. Здесь налитая капля бензофенона или салола рассасывается капиллярными силами, и когда жидкость достигает более грубой части поверхности — тогда, вероятно, и происходит кристаллизация.

5) На полированном стекле капля салола не кристаллизовалась в течение 100 мин., а капля бензофенона в течение 45 мин. Далее опыт был прерван.

6) На шероховатом стекле трудно избегнуть немедленной кристаллизации салола или бензофенона; тем не менее удавалось наблюдать случаи, когда салол не кристаллизовался на шероховатой стеклянной поверхности в течение 20 мин., а бензофенон — 45 мин.

7) На глянцевитой бумаге трудно получить не кристаллизующиеся капли салола или бензофенона. Удалось наблюдать случаи, когда салол не кристаллизовался на глянцевитой бумаге в течение 10 мин., а бензофенон — в течение 45 мин.

8) На плотной рисовальной бумаге также трудно получить не кристаллизующиеся капли салола или бензофенона. Иногда наблюдались случаи, когда салол не кристаллизовался в течение 100 мин., а бензофенон — в течение 45 мин. Что касается линейной скорости кристаллизации, определенной так, как указано в § 3, то эта скорость для салола оказалась независящей от рода поверхности и материала поверхности. За исключением грубого дерева, на котором наступает немедленная кристаллизация, для всех остальных поверхностей, упоминавшихся выше, линейная скорость кристаллизации салола равна при температуре комнаты (20° ± 0.50°) 3.47 ± 0.2 мм в минуту. Для бензофенона при той же температуре для всех поверхностей скорость кристаллизации равна 50.9 ± 2 мм в минуту.

Приведенная выше цифра 3.47 ± 0.2 мм в минуту для салола получена при пользовании препаратом «Гослаборснабжения» — наиболее загрязненным из двух, бывших в нашем распоряжении; для препарата салола фирмы «Kahlbaum» — пользуясь «фотографическим путем» определения линейной скорости кристаллизации (см. § 3), мы нашли величину последней для стеклянной поверхности при температуре 20° C, равной 3.9 ± 0.2 мм в минуту.

Для салола «Гослаборснабжения» найденная линейная скорость кристаллизации совпадает с найденной Тамманом, т. е. 3.46 ± 0.15 мм в минуту. Для салола фирмы «Kahlbaum» получена несколько повышенная величина. Это объясняется, вероятно, влиянием незначительного количества примесей, понижающих скорость кристаллизации (препарат «Гослаборснабжения»). Отступление полученной нами величины для линейной скорости кристаллизации бензофенона при температуре 20°, именно 50.9 ± 2 мм от найденной Тамманом объясняется безусловно недостаточной чистотой нашего препарата бензофенона (что доказывается непостоянством точки плавления последнего).

Как происходит самый процесс кристаллизации, можно видеть из приводимых фотографий кристаллизующихся тонких слоев салола, сделанных через определенные промежутки времени так, как указано выше (см. § 3).

Всего приводим две серии снимков (табл. I и II; во второй серии один снимок). Промежутки времени, через которые последовательно производилась съемка кристаллизующегося тонкого слоя салола, указаны при снимках.

§ 5. Выводы

1) Относительно влияния различных материалов с различными поверхностями на самопроизвольную кристаллизацию расплавленных и переохлажденных ниже температуры плавления салола и бензофенона можно вывести следующее заключение:

а) При достаточно гладких поверхностях, на всех изученных нами материалах самопроизвольная кристаллизация не наблюдалась по крайней мере в течение нескольких минут. Следовательно сам по себе материал, независимо от его теплопроводности и прочих свойств (медь, никель, стекло, дерево, бумага), если поверхность его гладкая, самопроизвольной кристаллизации не вызывает. б) Совершенно противоположное заключение необходимо сделать относительно влияния степени шероховатости поверхности. На грубой поверхности дерева наступает моментальная кристаллизация. На грубой поверхности меди, никеля, стекла, на бумаге с не очень гладкой поверхностью можно получить в виде исключения капли салола и бензофенона, не кристаллизующиеся довольно долго, но только в виде исключения. Большей частью на подобных поверхностях наступает быстрая кристаллизация. Следовательно переохлажденный ниже температуры плавления жидкий салол или бензофенон на подобных поверхностях находится в неустойчивом состоянии, вследствие чего на них легко возникает самопроизвольная кристаллизация. Попутно было показано очень резкое влияние мелких частичек постороннего материала на зарождение центров кристаллизации. Каждая небольшая посторонняя частичка, попадая в переохлажденный ниже температуры плавления жидкий салол или бензофенон, сразу же становится центром кристаллизации.

2) Примененные нами два метода определения линейной скорости кристаллизации для салола: а) отсчет времени, в течение которого граница между кристаллом и жидкостью переместится на определенное расстояние, измеряемое бумажной полоской с делениями и б) фотографирование и отсчет промежутка времени между двумя последовательными фотографированиями (см. § 3) — оба эти метода дали, учитывая влияние примесей, результаты, в общем сходные с данными Таммана, именно: для салола «Гослаборснабжения» 3.47 ± 0.2 мм в минуту; для салола «Kahlbaum» $3.9 \pm 0,2$ мм в минуту.

Метод а) для бензофенона позволил определить линейную скорость кристаллизации равной 50.9 ± 2 мм в минуту — также результат, согласующийся с данными Таммана, если учесть влияние примесей. Приведенные

величины линейной скорости кристаллизация салола и бензофенона являются максимальными (§ 1).

3) Максимальная линейная скорость кристаллизации в тонких слоях бензофенона и салола не зависит от тех поверхностей, на которых находится тонкий слой упомянутых веществ (поверхность полированной меди, никеля, стекла, гладкого дерева, глянцевитой бумаги, грубые поверхности меди, никкеля, стекла, обычная поверхность бумаги). Если бы материал и степень шероховатости поверхности влияли бы на скорость кристаллизации, то на металлической поверхности, вследствие более быстрого отвода теплоты металлом, можно было бы ожидать большей скорости кристаллизации, чем на поверхности не металлической. Одинаковость скоростей кристаллизации салола и бензофенона на поверхностях различных материалов, в силу только что приведенного соображения, не может быть объяснена также тем, что во всех наших опытах кристаллизации с одной стороны слой кристаллизующегося вещества соприкасался со стеклом, т. е. наблюдалась во всех опытах скорость кристаллизации на стекле.

4) Кристаллизация салола и бензофенона в тонких слоях происходит с одинаковой скоростью во всех направлениях, лежащих в плоскости слоев. Как следствие этого наблюдается такая картина: границы встречи двух кристаллов, растущих от разных кристаллических центров, являются прямыми линиями (см. прилож. снимки), а не закристаллизовавшееся свободное поле жидкого салола или бензофенона, уменьшаясь с течением времени по площади, остается по очертанию подобным предшествовавшим очертаниям (см. табл. I, серия I a, b и c).

5) Включение пузырьков воздуха, попавшего в слой салола или бензофенона, при кристаллизации их не заполняется кристаллами и является причиной образования «дыры» в тонком слое закристаллизовавшегося салола или бензофенона (табл. II, серия II).

Считаю своим долгом поблагодарить и здесь акад. В. А. Кистяковского за тему этой работы и за указания, сделанные при ее выполнении.

Февраль 1932

Серия I a. Кристаллизация тонкого слоя салола. Начало наблюдения.



Серия I b. Кристаллизация тонкого слоя салола. Через 1′24″ после ачала наблюдения.



Серия I c. Кристаллизация тонкого слоя салола. Через 2′48″ после начала наблюдения.



Серия II. Кристаллизация тонкого слоя салола. Включение пузырька воздуха.



Серия I d. Кристаллизация тонкого слоя салола. После окончания кристаллизации.



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

МАГНЕЗИТ НА БАКАЛЕ (ЮЖНЫЙ УРАЛ)

Л. М. МИРОПОЛЬСКОГО

(*Представлено академиком* **А. Е. Ферсманом**)

Первое указание на присутствие магнезита в районе Бакальских железорудных месторождений принадлежит проф. А. Н. Заварицкому[1] и приводится им в его статье «О железных рудах Бакальских месторождений на южном Урале», где автор, описывая железные руды района, между прочим в очень сжатой форме отмечает, что «в некоторых скважинах (на Тяжелом руднике) встречен также, залегающий в тех же условиях как железный шпат и как бы заменяющий его, магнезит». Этой заметкой исчерпываются пока все сведения о магнезитах Бакала, в частности и об условиях залегания его в этом районе.

Летом 1931 г. при изучении Бакальских месторождений, исходя из характера процесса доломитизации как этапа, предшествовавшего орудению (этапу сидеритизации, следующему за доломитизацией), я[2] высказал предположение о возможности выявления магнезита вокруг Бакальских железорудных месторождений непосредственно в приконтактовой зоне карбонатных пород с рудным телом. С целью уточнения этого вывода летом же, а также позднее при обработке материалов, мною было предпринято химическое исследование карбонатных пород, непосредственно примыкающих к рудному телу как из поверхностных частей месторождений, уже вскрытых выработками, так и из более глубоких частей месторождений, используя в последнем случае исключительно материалы буровых скважин, любезно мне предоставленные инж. Г. М. Мокшановым (по рудникам №№ 3 и 4) и инж. Г. А. Мельниковым (по рудникам г. Иркускан). При этом уже тогда же летом в результате предварительных анализов мне удалось уста-

[1] Проф. А. Н. Заварицкий. Геол. Вест. 1925 г., № 4, стр. 21.
[2] Проф. Л. Миропольский. ИМЕН, 1932 и Учен. Зап. Каз. гос. унив., т. 91, кн. 2, стр. 85.

новить для рудника № 3 наличие магнезитизированных доломитов, в которых ясно выявилось наличие превышения $MgCO_3$ над теоретическим содержанием его в доломите в сторону магнезита. Аналогичная картина в еще более резкой форме была прослежена в районе рудника № 3 к З в скважине № 137. Точнее количественное соотношение $MgCO_3$ и $CaCO_3$ в карбонатных породах из этих мест видно из таблицы № 1.

Таблица 1

№№ по порядку	Место взятия проб	Химический состав							
		CaO	MgO	FeO	MnO	$CaCO_3$	$MgCO_3$	$FeCO_3$	$MnCO_3$
1	Доломит со дна рудн. № 3 на 3 м к В от Сидерита	23.81	20.71	3.14	—	42.49	43.31	5.06	—
2	Доломит из скважины № 137 (к З от рудн. № 3) с глубины 159 95 м — — 162 99 м	19.92	25.27	3.90	0.14	35.54	52.84	6.27	0.23

Из приведенной таблицы превышение содержания MgO, а отсюда и $MgCO_3$, над теоретическим содержанием его в доломитах может считаться установленным, поскольку соотношение MgO и $MgCO_3$ и Ca и $CaCO_3$ для теоретически чистых доломитов определяется G. W. Bain[1] и R. B. Ladoo[2] следующим образом: MgO — 21.7, CaO — 30.4 и CO_2 — 47.9 (G. W. Bain) и MgO — 21.9, CaO — 30.4 или $CaCO_3$ — 54.2 и $MgCO_3$ — 45.8 (R. B. Ladoo). Вместе с этим, при детальном изучении приконтактовой зоны карбонатных пород с рудным телом, в поверхностных частях месторождений было также установлено в приводимом ряде рудников наличие крупно-кристаллических разностей карбонатных пород, по внешнему виду очень напоминающих магнезит из Саткинских месторождений: (№ 4), Ивановском руднике (Большая яма), Золотовой яме (№ 2) и в окрестностях рудников Тяжелого (№№ 2 и 3) (на планшете, 108 съемки 1/1000), В. Буланского № (1) (на планшете 124, съемки 1/1000). Вполне сходные разности этих же пород удалось также проследить и на образцах целого ряда буровых скважин г. Иркускан. Результат химических анализов образцов этих пород дан в таблице № 2.

[1] G. W. Bain. Ec. Geol. V. 19. № 5, 1924, стр. 430.
[2] R. B. Ladoo. Non-metallic minerals. 1925, стр. 198.

2) постепенный переход доломитов через магнезитизированные доломиты в магнезит (у зоны магнезита),

3) постепенный переход магнезита в сидерит (у зоны сидерита) и 4) самый состав сидеритов обычно всегда обогащенных $MgCo_3$ (от 15 до 30%) и даже содержащих $CaCO_3$ (от $1^1/_2$ до 2%). Отсюда участки магнезитизированного доломита и магнезита в периферии рудного тела я считаю за сохранившиеся от оруденения участки, исключительно обязанные своим возникновением процессу доломитизации. Однако все же, учитывая значительное содержание $CaCO_3$ в магнезите, приходится признать, что процесс доломитизации не дошел полностью до конца. Часть $CaCO_3$ в них еще сохранилась, что нельзя не признать за отрицательную сторону магнезитов Бакала.

Очень близкая картина соотношения условий залегания магнезита, доломита и доломитизированных известняков выявляется и на других рудниках: Ивановском (большая яма), Золотова яме (№ 2) и в окрестностях рудников Тяжелого и В. Буланского. В первом из них магнезит установлен посредине рудника в нижних уступах на границе соприкосновения доломитов и доломитизированных известняков, выходящих с восточной стороны рудника с рудой (с западн. стор.), где магнезит выступает на поверхность нижнего уступа в виде отдельных изолированных глыб. В этом случае магнезит макроскопически представляет также голокристаллические зерна породы слегка серовато-желтого цвета. Под микроскопом состав и строение магнезитов этого месторождения вполне аналогично составу и строению магнезита из рудника № 4. Три особенности необходимо отметить для данного месторождения: 1) зона магнезита здесь оказывается значительно более широкой, 2) совершенно отсутствует процесс окремнения магнезита и 3) местами в шлифах магнезита обнаруживаются двойниковые полоски. Генетическая сторона образования магнезита выдерживается и для этого района.

Вполне сходные условия залегания магнезита наблюдаются и в Золотовой яме (№ 2), где магнезит обнаружен на пережиме между двумя разносами в западном борту, на границе между плотным доломитом и рудой (уже изъятой).

Макроскопическая и микроскопическая характеристика его, а равно магнезита из двух последних месторождений, вполне аналогична магнезитам первых двух месторождений.

Совершенно аналогичное строение имеет магнезит и с глубоких частей месторождений г. Иркускан из скважины № 24 по линии 13-й. Здесь не-

обходимо отметить 3 особенности: 1) более светлосерую окраску магнезита (совершенно аналогичную Саткинским магнезитам), 2) присутствие в нем пирита в виде ясно образованных кристаллов с ограничением пентагонального додекаэдра и 3) значительно большую мощность магнезита, судя по документации инж. Г. А. Мельникова, около трех метров (с глубины 166—168 м). При этом за отсутствием других кернов из этой скважины остается совершенно неясным, что залегает выше и ниже этой пробы. Весьма вероятно, что мощность магнезита из скважины № 24 окажется значительно большей трех метров. Во всяком случае, даже эти пока далеко не полные и отрывочные данные заставляют обратить особое внимание на магнезит Бакала. Это тем более уместно подчеркнуть именно сейчас, когда идет разведка в этом районе на железные руды, чтобы не дублировать ее после, уже со специальным заданием только на магнезит.

Однако, уже теперь, исходя из только что приведенных отрывочных фактов, можно отнести месторождения магнезита на Бакале уже совершенно отчетливо к типу метасоматических месторождений магнезита (по классификации G. W. Bain 4-й тип) и отсюда считать их вполне аналогичными месторождениям Сатки,[1] Veitsch[2] (Штирия в Чехо-Словакии), Chevelah Valley[3] (Stevens County, Washington. U. S. A.), Grenville[4] (между Montreal и Ottawa, Argenteuil, Quebec) и Ta-shih-chao[5] (Южн. Манчжурия).

---

[1] Проф. А. Н. Заварицкий. КЕПС. Т. 4, в. 31, 1917 г., стр. 8.

[2] K. A. Redlich. Tschermaks. Mineralog. Mitt. 1907. стр. 499. Fortschr. d. Miner. Krystal u. Petr. B. 4, 1914.

[3] O. P. Ienkins. Ec. Geol., v. 8, 1918, стр. 381—384.

[4] G. W. Bain. Ec. Geol., v. 20, № 5, 1924, стр. 423.

[5] K. Niinomy. Ec. Geol., v. 20, № 1, 1925, стр. 41 и T. Kats. Ec. Geol. v. 24, № 1, 1929, стр. 90—93.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES ALGUES PERFORANTES

Par G. A. NADSON

1. La dissociation du thalle et le polymorphisme chez les algues perforantes *Hyella* et *Mastigocoleus*

On savait depuis bien des années déjà que les coquilles des mollusques, les coraux, les os des animaux qui se trouvent sous l'eau, sont quelquefois perforés par des microorganismes, qu'on prenait le plus souvent pour des champignons, mais sans raisons suffisantes. D'ailleurs, en ce temps-là, les galeries et canaux creusés par les microorganismes étaient mieux connus que ces microorganismes mêmes. Ce ne fut qu'en 1889[1] que Bornet et Flahault publièrent un article peu volumineux, mais très important, dans lequel ces auteurs décrivaient minutieusement les «algues perforantes», dont les unes appartenaient au groupe des «algues vertes» ou Chlorophycées (*Gomontia*, *Ostreobium*) et les autres à celui des «algues bleues» ou Cyanophycées (*Hyella*, *Mastigocoleus*).

En concentrant toute leur attention sur l'étude de la structure et du développement de ces algues, les célèbres algologues français cités plus haut ont dédaigné d'examiner l'importance de ces algues pour l'économie de la nature. En 1900, en me basant sur mes propres recherches, de même que sur le choix des données disséminées dans la littérature, j'ai indiqué jusqu'à quel point les algues perforantes étaient répandues et quel rôle éminent elles jouaient dans la nature, comme destructrices de pierres calcaires, de rochers, de coquilles de mollusques, de coraux etc.

Je terminais mon travail[2] par les paroles suivantes: «Les algues perforantes sont largement répandues sur la terre et y végètent depuis longtemps.

[1] Ed. Bornet et Ch. Flahault. Sur quelques plantes vivant dans le test calcaire des mollusques. Bull. Soc. bot. France, t. 36, 1889, p. CXLVII.

[2] G. A. Nadson. Die perforierenden (kalkbohrenden) Algen und ihre Bedeutung in der Natur. «Scripta Botanica» Horti Univ. Petropol. Fasc. XVIII, 1900, p. 34 (en russe avec un résumé en allemand).

Leur rôle, peu apparent à premiére vue, est, en somme, réellement grandiose. Depuis des millions d'années, lentement, mais obstinément et sans relâche, elles perforent les pierres et les coquilles et, en les amollissant, elles facilitent leur destruction ultérieure par les vagues et entraînent de nouveau le calcium (de même que certains autres éléments — le magnesium, le phosphore) dans la grande circulation des éléments».

Depuis ce temps, mes recherches ultérieures,[1] de même que les travaux des dernières années d'Ercegović,[2] confirmèrent de plus en plus la vérité de cette thèse.

Dans le travail présent je mentionnerai certaines particularités du développement des algues perforantes offrant un intérêt, notamment la question de la dissociation du thalle et du polymorphisme des algues bleues *Hyella caespitosa* Bornet et Flah. et *Mastigocoleus testarum* Lagerh.

Le thalle de la première algue est composé de filaments capables d'une ramification véritable; quelques uns de ces filaments poussent plus ou moins horizontalement, sont très sinueux et s'entrelacent d'ordinaire étroitement en partant du centre sous forme de rayons: ce sont les filaments primaires; de ceux-ci partent, en pénétrant dans le substratum, des filaments secondaires plus ou moins longs. Les filaments se composent de cellules cylindriques ou arrondies, quelque peu espacées, et sont entourés d'une gaine. Ainsi qu'il a déjà été mentionné par Bornet et Flahault, les cellules composant les filaments peuvent se dissocier en cellules à part qui, en continuant à se multiplier, peuvent former des agglomérations ressemblant à des colonies d'algues unicellulaires bleues, Chroococcacées. Entre les filaments longs typiques, les filaments courts et les groupes de cellules *chroococcoïdes*, il existe toutes sortes de formes intermédiaires.[3]

Dans mon étude de 1900 j'ai décrit ce processus en détail et, en résumant, j'ai fait remarquer ce qui suit: «La dissociation des filaments de l'*Hyella* présente un grand intérêt et une importance éminente au point de vue biologique. On peut suivre assez souvent toutes les étapes de ce processus sur un seul filament. En certains cas il se forme de petits tas de cellules aves de fines membranes, correspondant entièrement aux cellules du *Chroococcus*; c'est l'état *Chroococcoïde* de l'*Hyella*. Plus souvent les fila-

[1] G. A. Nadson: Les algues perforantes, leur distribution et leur rôle dans la nature. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 184, 1927, p. 1015. Les algues perforantes de la Mer Noire. C. R. Acad. Sci. Paris. t. 184, 1927, p. 896. Die kalkbohrende Algen des Schwarzen Meeres. Arch. Russ. de Protistol, t. VI, 1927, p. 147.

[2] Les travaux d'Ercegović seront indiqués plus loin.

[3] Bornet et Flahault, l. c., p. 166.

ments entourés d'une gaine épaisse forment des cellules avec enveloppes gélatineuses encore plus épaisses, souvent lamelleuses et offrant un système d'enchassement. Parfois la gaine entourant la cellule est d'une épaisseur égale partout, d'autres fois elle est plus développée d'un côté que de l'autre. Les agglomérations de cellules de ce genre ressemblent excessivement à des colonies gélatineuses de *Gloeocapsa*: c'est la *Hyella* à l'état *Gloeocapsoïde*. Dans chacun de ces deux états, les cellules peuvent se multiplier par division en formant de grands amas de cellules dans les parties periphériques du substratum ou à la surface de celui-ci. Il est intéressant que cette gaine gélatineuse grossit parfois démesurément et isole ainsi de plus en plus le contenu vivant de la cellule du monde extérieur. Ce contenu vivant, muré dans la gaine, dépérit par conséquent peu à peu, se désorganise et finit par disparaître. Il ne reste que les gaines vides qui se détruisent ensuite lentement. Nous avons devant nous une des manifestations de la loi de l'inertie physiologique[1] transformant le processus normal de la gélification de la membrane (adaptation défensive) en un phénomène pathologique se terminant par la mort de la cellule».[2]

Nos dessins représentent les états chroococcoïde et gloeocapsoïde (Pl. I. A, fig. 3; Pl. I. B; Pl. II. A; Pl. II. A, fig. 1—4; Pl. III. A, fig. 1—2) de même que l'atrophie graduelle des cellules renfermées dans d'épaisses gaines gélatineuses (Pl. I. A, fig. 4; Pl. I. B, fig. 4—7; Pl. III. A, fig. 3).[3]

Il suffit de ces données pour reconnaître un polymorphisme considérable de l'*Hyella*.

Il existe beaucoup de formes intermédiaires entre les longs filaments ramifiés et les colonies chroococcoïdes ou gloeocapsoïdes.

La longueur et la largeur des filaments, la distance entre les cellules, l'épaisseur et la couleur des gaines gélatineuses varient également. Le lien génétique des formes désagrégées de ce genre avec celles qui sont typiques pour l'*Hyella*, ainsi qu'elles ont été décrites par Bornet et Flahault, peut être constaté avec une certitude absolue. J'ai acquis cette conviction en

[1] Des phénomènes de l'inertie physiologique chez les animaux avaient été signalés depuis longtemps par N. P. Wagner, professeur à St. Pétersbourg; malheureusement, cette question n'a pas attiré toute l'attention qu'elle mérite.

[2] Des phénomènes de ce genre sont très répandus parmi les organismes inférieurs. Ainsi, on l'a constaté chez les bactéries (*Bacillus mycoïdes*). Voir G. Nadson und S. Adamowić. Über die Beeinflussung der Entwicklung des *Bacillus mycoïdes* Flügge durch seine Stoffwechselprodukte. Bull. Jard. bot. St. Pétersb. t. X, 1910, 154.

[3] Voir plus loin l'explication détaillée des figures. Tous les dessins ont été preparés avec un grossissement de 1000 fois et réduits pendant la confection des clichés à $^4/_5$ de la grandeur primitive.

étudiant les matériaux que j'avais recueillis sur l'île d'Helgoland et surtout dans les Mers Noire et Baltique.

Cependant, si l'on ne tient pas compte des faits susdits, on peut prendre telle ou telle forme de l'algue polymorphe *Hyella caespitosa* pour une espèce ou même pour un genre distinct d'algues, ainsi que cela paraît avoir eu lieu en effet.

Par exemple, Lehmann a décrit l'*Hyella Balani* comme une espèce nouvelle. Moi aussi, j'ai trouvé cette forme ainsi que diverses transitions entre elle et l'*Hyella caespitosa* typique à Sébastopol, dans la Mer Noire, et cette forme se rencontre non seulement sur des coquilles de *Balanus* (comme l'auteur le croyait), mais souvent aussi sur les pierres calcaires près du rivage. Aucune des propriétés signalées par Lehmann[1] pour considérer cette forme comme une espèce distincte ne paraît être, ainsi que je m'en suis convaincu, suffisemment stable et, par suite, essentielle. Pl. II. A. fig. 4—5 représente une *Hyella caespitosa* de ce même type avec filaments raccourcis et passant à l'état de dissociation comme elle est représentée sur les figures de Lehmann pour l'*Hyella Balani*. D'autres exemples de ce genre seront indiqués plus loin.

Comme on le voit d'aprés nos dessins, un filament de l'*Hyella* peut se désagréger tout entier ou seulement en partie et se transformer en cellules chroococcoïdes ou gloeocapsoïdes. Ces dernières, en croissant, peuvent former, de nouveau, des filaments ou bien, en continuant à se multiplier par division, elles peuvent former des amas ou colonies de cellules du même genre. Parfois, la division du filament en cellules n'offre qu'un épisode de courte durée dans la vie de l'algue et sert à la multiplication; en ce cas, des filaments nouveaux poussent des cellules; dans d'autres cas, l'état de dissociation est stable et de longue durée et l'algue, sans former de filaments, continue à se multiplier pendant une période indéfinie en croissant commes les algues bleues unicellulaires (*Chroococcus, Gloeocapsa* etc.).

En plus de la multiplication par cellules végétatives isolées l'*Hyella* peut se multiplier également par spores se formant dans des sporanges, ainsi que l'ont déjà décrit Bornet et Flahault. Les sporanges sont généralement plus grands que les cellules végétatives. D'aprés Bornet et Flahault[2] lors de la formation de spores dans le sporange il se produit ce qui suit: «le protoplasme se divise, à partir de la base, en nombreuses spores ayant envi-

[1] E. Lehmann. Über *Hyella Balani* nov. sp. Nyt Magazin f. Naturvidenskab., 1903 Bd. 41, S. 77.
[2] Bornet et Flahault, l. c., p. 168.

ron 2 μ de diamètre». Or, d'après ce que j'ai observé en 1900,[1] les spores se forment par suite de ce que le protoplasme du sporange se divise simultanément en un grand nombre de cellules très petites (d'environ 2 μ de diam.), de taille égale, rondes et nues. Pendant la germination les spores donnent naissance aux filaments pénetrant dans le substratum, ou bien après la destruction de la membrane du sporange, continuent à rester en tas, puis commencent peu à peu à s'étendre en croissant et se transforment en un amas de cellules chroococcoïdes. Ces dernières, en cette forme, continuent à se multiplier par division ou bien produisent, en croissant, des filaments nouveaux. Il ne faut pas confondre (ce qui a eu lieu parfois, comme nous le verrons plus loin) avec les sporanges véritables ce que j'ai appelé (en 1900) «les faux sporanges».[2] Il s'agit de ce qui suit: la division répétée d'une cellule végétative peut donner lieu à la formation d'amas de cellules chroococcoïdes renfermées dans une capsule gélatineuse commune (capsule mère). Au début les cellules sont grandes, mais plus le processus de la division répétée se prolonge, plus leur grosseur décroît. En somme, leur taille varie et est en proportion inverse à leur nombre dans la capsule commune. Si elles sont nombreuses et menues, on peut les prendre pour des spores renfermées à l'intérieur du sporange. Cependant, leur mode de formation et leurs dimensions variables, inégales, aussi bien que le fait que ce ne sont pas des cellules nues, mais munies d'une membrane, — tout cela les distingue des spores véritables. Nos figures (Pl. I. A, fig. 3 *a-e*) représentent la formation graduelle d'un faux sporange au moyen de la division répétée d'une cellule végétative.

Bien des années plus tard (1925) Geitler a décrit sans aucun doute le même phénomène chez diverses algues bleues sous le nom de formation de Nannocytes (Nannocyten). «An Stelle einer Mutterzelle, dit-il,[3] ein Haufen vieler, winzig kleiner Zellen liegt». Dans un autre de ses articles,[4] il dit: «Ich nenne solche durch rasch nacheinander folgende Teilungen nach drei Raumrichtungen gebildete, meist abnorm kleine Zellen Nannocyten». Il est évident que cet auteur n'a pas eu l'occasion de prendre connaissance de mon travail (1900).

[1] G. Nadson. 1900, l. c., p. 22.

[2] G. Nadson. 1900, l. c., p. 22; résumé en allemand, p. 37.

[3] L. Geitler. *Cyanophyceae* dans A. Pascher's. Die Süsswasserflora von Deutschland. H. 12, 1925, S. 15—16.

[4] L. Geitler. Über neue oder wenig bekannte interessante Cyanophyceen etc. Arch. f. Protist. Bd. 51, 1925, S. 321.

Je me suis arrêté un peu plus longuement là-dessus vu qu'en certains cas les auteurs décrivaient et représentaient comme sporanges ce qui n'était en réalité que de «faux sporanges», autrement dit, des formations de nannocytes, p. e. Huber et Jadin chez l'*Hyella fontana*,[1] Lehmann chez l'*Hyella Balani*,[2] Ercegović chez l'algue perforante *Solentia*[3]. Ce que ces auteurs décrivaient comme des sporanges correspond en réalité à ce qui est représenté à notre Pl. I. A. fig. 3—4.

La formation de sporanges véritables est plus répandue chez les formes filamenteuses de l'*Hyella* et se rencontre, du moins d'après ce que j'ai pu observer, rarement chez l'*Hyella* à l'état de dissociation.

Passons maintenant à une autre algue perforante — *Mastigocoleus testarum* Lagerh. Son thalle consiste en filaments ramifiés composés de petites cellules courtes, entourées de gaines minces; d'ordinaire les filaments s'entrelacent en pelotons épais. Les hétérocystes aux extrémités des branches ou sur leurs côtés sont caractéristiques. Multiplication par hormogonies. Lagerheim,[4] le premier qui a décrit cette algue, a indiqué également qu'elle pouvait passer en partie à l'état de dissociation; en même temps, les cellules formant le filament se séparent et, au moyen de divisions répétées, produisent les «corps muriformes ressemblant aux Chroococcacées».

Bornet et Flahault contestent la faculté du *Mastigocoleus* de passer à l'état de dissociation et supposent que Lagerheim s'est trompé et que les cellules chroococcoïdes observées par lui n'appartenaient pas au *Mastigocoleus*, mais à une autre algue, notamment à l'*Hyella*. Cependant, j'ai réussi à observer avec une certitude absolue le passage du *Mastigocoleus* à l'état de dissociation, soit chroococcoide, soit gloeocapsoïde. Bien que l'*Hyella* se rencontre souvent à côté, à la même place que le *Mastigocoleus*, j'ai pu suivre sur les préparations comment un filament de cette algue possédant des hétérocystes caractéristiques (qui ne se rencontrent pas chez l'*Hyella*, se divisait graduellement, pas à pas, en cellules constitutives qui, en se dissociant plus loin, se transformaient en groupes semblables aux Chroococcacées. Plus fréquemment encore, les cellules isolées contenues dans la gaine du filament, en se divisant dans trois directions, forment des groupes de cellules recouvertes de gaines épaisses et lamelleuses, ressem-

[1] J. Huber et F. Jadin. Sur une nouvelle algue perforante d'eau douce. Journ. de Bot., 1892, Extrait, p. 5 et fig. 6—10, pl. XI.

[2] E. Lehmann. l. c., S. 83 et fig. 9—11, Taf. 11.

[3] A. Ercegović. Trois nouveaux genres des Cyanophycées lithophytes de la côte adriatique. Acta Bot. Inst. Bot. Univ. Zagreb., Zagreb, vol. II, 1927, p. 79—80, fig. 7—8.

[4] G. Lagerheim. Note sur le *Mastigocoleus*. — Notarisia. An. I, 1886, p. 1.

blant, par leur structure et leur développement, au *Gloeocapsa*. On a pu observer souvent comment une des extrémités d'un seul et même filament conservait son ancienne structure filamenteuse, tandis que l'autre se transformait en groupes de cellules gloeocapsoïdes, sa gaine se gonflant parfois assez considérablement (Pl. II. B., fig. 1—2, cette dernière montrant unu hétérocyste caractéristique). Les hormogonies, de même que l'algue toute entière, peuvent parfois passer à l'état de dissociation et en ce cas il ne reste plus aucune trace des anciens filaments; sous cette forme, elles peuvent certainement vivre longtemps et se multiplier.

Voici une de mes observations qui mérite d'être notée. Des coquilles de *Mya* et de *Cardium* avec algues perforantes, *l'Hyella caespitosa* et le *Mastigocoleus testarum*, que j'avais ramassées dans la Mer du Nord en 1898 près des bords de l'île Sylt, furent placées alors même dans un aquarium contenant de l'eau de mer artificielle (solution de 3.5 p. c. de sel marin dans de l'eau douce). Le processus de dissociation du thalle de ces deux algues filamenteuses, qui avait commencé encore dans la mer, se poursuivait énergiquement dans l'aquarium; les deux algues passaient de plus en plus à l'état gloeocapsoïde, avec d'épaisses gaines gélatineuses. Avec les années, la multiplication de ces cellules gloeocapsoïdes s'affaiblissait; pour la plupart, les gaines s'épaississaient et se gonflaient démesurément, tandis qne le contenu vivant à l'intérieur des cellules s'atrophiait; finalement, il nerestait que des gaines vides (il a été question de ce processus plus haut). Cependant, même en 1930, c'est-à-dire 32 ans après que les algues avaient été placées dans l'aquarium, on rencontrait encore des filaments courts et des groupes gloeocapsoïdes des deux algues avec des cellules vivantes parfaitement normales.[1]

Les dessins ci-annexés[2] donnent une idée du processus de dissociation du thalle chez *l'Hyella* et *le Mastigocoleus*.

Pl. I. A, fig. 1 — *Mastigocoleus testarum* sur une coquille de *Mya* de l'île Sylt dans la Mer du Nord; début de l'arrondissement des cellules et de la dissociation du thalle; fig. 2 — même phénomène à la superficie d'une coquille de *Patella* de Crimée; on y aperçoit deux hétérocystes typiques; fig. 3, *a—d*: formation de «faux sporanges» ou de «nannocytes» chez *l'Hyella caespitosa* provenant d'un aquarium établi en 1898, dessiné

[1] Une troisième algue perforante, le *Plectonema terebrans*, y restait également vivante et s'étendait en croissant.

[2] J'exprime mes sincères remerciments à M-me E. J. Rochline pour avoir bien voulu m'aider à confectionner les dessins et les préparations.

en 1904; fig. 4 — *Hyella caespitosa* sur des pierres près de la surface de l'eau, golfe de Sébastopol; développement puissant de gaines gélatineuses lamelleuses; disposition des lamelles souvent excentrique.

Pl. I. B, fig. 3 — *Hyella caespitosa* sur coquille de *Cardium*; l'aquarium (1898); dessiné en 1929; état de dissociation du thalle et de formation de colonies gloeocapsoïdes; gaines lamellées excentriquement; fig. 1, 2, 4—7: même algue sur pierres calcaires provenent du golfe de Sébastopol.

Pl. II. A, fig. 1—4: *Hyella caespitosa*, golfe de Sébastopol, sur des pierres près de la surface de l'eau; état gloeocapsoïde et son développement depuis la forme filamenteuse (fig. 2—4); fig. 5 — *Hyella caespitosa* sur coquilles de *Balanus* — forme du type *Hyella balani* Lehm.

Pl. II. B, fig. 1—2 — *Mastigocoleus testarum*, provenant de l'aquarium, dessiné en 1905; dissociation et passage à l'état gloeocapsoïde; dans la fig. 2 — héterocyste caractéristique.

Pl. III. A — *Hyella caespitosa*, de l'aquarium (1898), dessiné en 1904; fig. I — formes chroococcoïdes; fig. 2 — cellules avec épaisses gaines lamelleuses; fig. 3 — dégénérescence et destruction graduelle des cellules contenues dans d'épaisses gaines gélatineuses.

Pl. III. B — *Mastigocoleus testarum*, var. *aquae dulcis*,[1] provenant de la rivière Msta; état gloeocapsoïde sur des pierres; de l'aquarium où les pierres avaient été placées en 1908; dessiné d'après nature en 1929.

J'estime que tout ce qui précède atteste avec certitude l'existence de l'état de dissociation chez les deux algues perforantes et leur polymorphisme fortement accentué.[2] Il est évident que l'un et l'autre dépendent des conditions extérieures de sa vie. Mais quelles sont ces conditions?

D'après les observations de Lehmann,[3] l'*Hyella balani* avec filaments fortement ramifiés se rencontre dans des endroits très bien abrités, tandis qu'aux endroits accessibles aux vagues et embruns elle a des fiilaments de longueur moyenne ou offre l'aspect de colonies chroococcoïdes. «An Orten, — dit-il, — welche der Brandung, bezüglich den Atmosphärilien, besonders ausgesetzt sind, meist Pflanzen gefunden werden, welche keine

[1] G. Nadson. *Mastigocoleus testarum* var. *aquae dulcis* Nads. Bull. Jard. Bot. St. Pétersb., t. X, 1900, p. 151.

[2] Je ferai observer ici que non seulement les algues bleues (Cyanophycées) mais aussi l'algue verte perforante, *Gomontia polyrhiza*, est très polymorphe et capable de passer à l'état de dissociation: état «protococcoïde» correspondant à l'état «chroococcoïde» des algues bleues decrites ci-haut et état «palmelloïde» correspondant à l'état «gloeocapsoïde». V. details: Nadson, 1900, l. c., p. 7.

[3] E. Lehmann l. c., S. 83.

oder zum mindesten nicht sehr lange Fäden trugen, dass dagegen alle die Pflanzen mit reichverzweigten Fäden, die ich beobachtete, an äusserst geschützten Orten innerhalb des Hafens oder hinter Steinen etc., gesammelt wurden».

Mes observations ne concordent pas avec cette assertion. Il est vrai que moi aussi j'ai souvent rencontré *l'Hyella* et le *Mastigocoleus* à l'état de dissociation ou bien avec des filaments très courts près du bord dans la région des embruns (Mer Noire près de Sébastopol et Balaklava, Mer Baltique à Hapsal, près d'Helgoland et de l'île Sylt dans la Mer du Nord, près de Bakou dans la Mer Caspienne). J'ai recueilli des matériaux intéressants sous ce point de vue en Crimée prés du Jardin Botanique de Nikita; à cet endroit, sur des pierres, presqu'à la surface de l'eau, siègent de nombreux mollusques du genre *Patella*, arrosés par les vagues et, par moments, mis entièrement à nu. Ils sont couverts de taches bleu-vertes; c'est précisément en ces endroits que se nichent, à l'intérieur de la coquille, les *Mastigocoleus testarum* avec toutes les formes de transition graduelle depuis les filamentes typiques dans la profondeur des coquilles jusqu'aux filaments entièrement dissociés à la surface. Ces filaments donnent naissance à de nombreuses colonies gloeocapsoïdes avec gaines épaisses dont la couleur varie depuis le jaune brunâtre jusqu'au brun sombre. En certains cas, le contenu des cellules n'a pas la couleur bleu-verte typique pour les Cyanophycées, mais une coloration jaune brunâtre ou jaune dorée.[1]

Cependant, j'ai également trouvé des algues de l'espèce en question en divers stades intermédiaires à l'état de dissociation dans des conditions tout-à-fait différentes dans des eaux calmes où l'influence des vagues était entièrement exclue. Par exemple, dans le golfe de Sébastopol à une profondeur de 11 *m* j'ai trouvé des formes du type «*Hyella balani*» et des colonies gloeocapsoïdes de l'*Hyella caespitosa*. De même à une profondeur de 30—40 *m* sur des coquilles de *Pecten* et de *Cardium*. Ce qui est encore plus caractéristique, c'est la disparition graduelle de la forme filamenteuse de l' *Hyella* et du *Mastigocoleus* et l'apparition d'un grand nombre de formes gloeocapsoïdes de ces algues dans l'aquarium dont il a été question plus haut; le processus se poursuivait ici, en progressant avec les années, dans de l'eau absolument stagnante.

[1] Ceci est également le résultat de la vie en plein soleil. Les preuves de ce que ce changement de coloration des algues bleues dépend de l'intensité de l'éclairage, sont établies par les expériences décrites dans mon article: «De l'influence de l'intensité d'éclairage sur la coloration des algues». Bull. Jard. Bot. St. Pétersb., t. 8, 1908, p. 122.

Bornet et Flahault[1] firent une appréciation plus juste des conditions. Selon leurs observations, la transition de l'*Hyella* à l'état de dissociation et la formation de «petites masses semblables à des colonies de Chroococcassées» a lieu aux endroits où la surface des vieilles coquilles est déjà «rongée» par les algues perforantes, amollie, et où la quantité de la matière organique de la coquille a diminué. J'ai souvent pu observer, cependant, la transition des filaments à l'état de dissociation à la superficie de pierres calcaires très dures, polies par les vagues et à la surface de coquilles très résistantes, telles que le *Pecten* (l'un et l'autre dans le golfe de Sébastopol).

D'après ce que j'ai pu observer, le siège de l'algue exerce une influence essentielle sur la forme: à l'intérieur du substratum (pierres, coquilles), c'est-à-dire en cas de vie endolithique l'algue offre l'aspect de filaments plus ou moins longs et ramifiés; ce sont ceux-ci surtout qui perforent le substratum; plus près de la superficie du substratum et surtout à sa surface, étant donnée une vie epilithique, les algues passent souvent à état de dissociation (formes chroococcoïdes, ou, surtout, gloeocapsoïdes), et continuent sous cet aspect à se développer et à se multiplier. Dans leur état de dissociation, les deux algues, pour ce qui concerne la forme, la dimension et la structure interne, et le mode de multiplication, ressemblent à un tel point aux représentants des genres *Chroococcus, Gloeocapsa, Pleurocapsa, Entophysalis*, que si l'on ignore ou que l'on ne fait pas attention à la possibilité de leur rapport génétique avec l'*Hyella* et le *Mastigocoleus* typiquement filamenteux, on peut les prendre pour des algues appartenant à l'un des genres que je viens l'indiquer.

Dans mon travail de 1927, j'avais déjà appelé l'attention des algologues sur ce point.[2]

En particulier, l'originalité de quelques «nouvelles» espèces de *Pleurocapsa* (p. e. *Pleurocapsa entophysaloides* S. et G.)[3] et des quelques genres classés comme appartenant à la famille de *Pleurocapsaceae* donne lieu à des

[1] Bornet et Flahault, l. c., p. 168.

[2] G. Nadson. Les algues perforantes de la Mer Noire. — Arch. Russ. de Protistologie, t. VI, 1927, p. 150: «Il est fort possible que ces formes de dissociation, dont le rapport avec les filaments est plus ou moins perdu, étaient considérées et classées comme appartenant aux genres *Gloeocapsa, Pleurocapsa*, ou *Entophysalis*. Je ne veux, certes, pas dire par là que tous les représentants des genres susmentionnés ne sont que des formes de dissociation de l'*Hyella* et du *Mastigocoleus*, je ne désire qu'attirer l'attention des algologues sur un point qui mérite d'être traîté avec circonspection».

[3] Setchell and Gardner. The Marine Algae of the Pacific Coast of North America. Part I. *Myxophyceae*. Univ. of California Publ. in Bot., vol. 8, 1919, p. 38.

doutes et à des soupçons bien fondés. Entre autres, Geitler[1] remarque ce qui suit: «Die Aehnlichkeit von *Hyella* mit den Jugendstadien von *Pleurocapsa* ist sehr gross», mais, malheureusement, cet auteur non plus, dans son aperçu systhématique des algues bleues, n'a pas traîté cette question avec un sens critique suffisant.

L'originalité fort douteuse de l'espèce *Hyella Balani* de Lehmann à déjà été mentionnée plus haut, on peut en dire autant de l'*Hyella littorinae* S. et G.[2] L'*Hyellococcus niger* Schmidle,[3] qui, comme le dit l'auteur lui-même, est très rapproché de l'*Hyella*, représente également, à mon avis, une des formes de l'*Hyella caespitosa.*

Depuis ces derniers temps, A. Ercegović a publié plusieurs travaux très intéressants sur les algues perforantes, en y décrivant quelques genres nouveaux. L'examen des descriptions et des dessins de l'auteur m'amène à douter si ces nouveaux genres ne sont pas nos anciennes connaissances — l'*Hyella caespitosa* et le *Mastigocoleus testarum* se trouvant dans diverses phases de transition à l'état de dissociation. Par exemple, les genres nouveaux d'Ercegović — *Dalmatella*[4] et *Scopulonema*,[5] sont très rapprochés l'un de l'autre et en tous leurs caractères essentiels, sont semblables à l'*Hyella caespitosa* se trouvant dans les stades de dissociation du thalle et de formation de groupes gloeocapsoïdes. On peut s'en assurer, d'ailleurs, en comparant les dessins contenus dans le travail de l'auteur susdit, pp. 37 et 40, pour *Dalmatella,* et p. 366 pour *Scopulonema,* avec les nôtres dans la pl. II. A, fig. 2—5.

Le genre *Solentia*[6] dont les représentants, ainsi que ceux des deux genres précédents décrits par Ercegović, mènent une vie endolithique aussi bien qu'épilithique, donne lieu pour la même raison, à des doutes sur sa légitimité; à cet effet il suffit, je suppose, de comparer les figures de l'auteur avec ce qui est représenté au sujet de l'*Hyella caespitosa* sur nos dessins (Pl. I. A, fig. 4; Pl. I. B; Pl. II A, fig. 2—3). A ce propos, on peut observer que le développement excentrique, c'est-à-dire plus fort d'un côté, des

[1] L. Geitler. *Cyanophyceae.* — A. Pascher's Die Süsswasserflora von Deutschland etc., H. 12, 1925, S. 136.

[2] W. Setchell, and N. Gardner, l. c., p. 42.

[3] E. Baumann. Die Vegetation des Untersees (Bodensee). — Arch. f. Hydrobiol., Suppl. Bd. I, 1911, S. 33.

[4] A. Ercegović. *Dalmatella,* — nouveau genre des Cyanophycées lithophytes de la côte Adriatique. Acta Bot. Inst. Bot. Univ. Zagreb, vol. IV, 1929, p. 35.

[5] A. Ercegović. Sur quelques types peu connus des Cyanophycées lithophytes. Arch. für. Protist., Bd. 71, 1930, p. 365.

[6] A. Ercegović. Trois nouveaux genres etc., l. c., p. 78—80, fig. 3—5.

gaines lamelleuses, qui attire ici l'attention, a déjà été signalé il y a longtemps par Bornet et Flahault également pour l'*Hyella caespitosa*.[1] Il est possible que le groupe de formes de cette algue comprend encore un genre d'Ercegović, l'*Aspalatia*.[2] Quant au nouveau genre *Hormathonema*, la même possibilité n'y est pas exclue non plus (comparez les dessins d'Ercegović[3] avec les nôtres: Pl. I. A, fig. 4 et Pl. I. B).

Du reste, quant à la position systhématique des «nouveaux» genres énumérés, l'auteur lui-même, M. A. Ercegović, hésite de s'exprimer avec une certitude suffisante ou bien les classe provisoirement parmi les *Pleurocapsaceae*.[4]

Une révision critique de ces genres, basée sur les matériaux nouveaux, paraît indispensable. Quoi qu'il en soit, les données critiques exposées ci-dessus nous font voir des variations considérables dans la structure et le développement de l'*Hyella* et du *Mastigocoleus*, surtout pour ce qui concerne la première, ce qui mérite une attention particulière, ces algues étant fort répandues dans la nature et jouant un rôle éminent dans la migration des éléments.

II. Sur la question de la précipitation du carbonate de calcium par les algues perforantes

En 1898, des coquilles de *Cardium*, de *Scrobicularia* et de *Mya arenaria* recueillies près des côtes de l'île de Sylt dans la Mer du Nord et recouvertes de taches d'algues perforantes, principalement de l'*Hyella caespitosa* et du *Mastigocoleus testarum*, furent placées dans un aquarium contenant de l'eau de mer artificielle (solution de 3.5 p. c. de sel marin dans de l'eau douce). Une partie des algues périt, une autre partie vit jusqu'à présent, mais principalement à l'état dossocié.[5]

Quelques années plus tard on vit apparaître à la superficie intérieure de coquilles de *Cardium* et de *Scrobicularia* des tubercules hémisphériques semblables à des verrues; au début ils étaient petits et peu nombreux, puis ils grossissaient en atteignant un diamètre de 2—3 *mm* et leur

[1] Bornet et Flahault, l. c., p. 168, pl. XI, fig. 4.

[2] A. Ercegović. Trois nouveaux genres etc., l. c., p. 81.

[3] A. Ercegović. Sur quelques nouveaux types Cyanophycées etc. Arch. f. Protist., Bd. 66. 1929, p. 164.

[4] On se demande maintenant si les espèces décrites par Ercegović: *Aphanocapsa endolithica*, *Chroococcus lithophilus*, *Croatella lithophila*, *Lithococcus ramosus*, ne representent que des stades du developpement d'autres algues bleues endolithiques ou epilithiques.

[5] V. plus haut.

nombre augmentait; ceci est dessiné d'après nature en 1904, grandeur double (Pl. III. C).

Depuis lors les tubercules ne se sont pas agrandis sensiblement. L'examen microscopique et microchimique a démontré que les tubercules consistaient en carbonate de calcium et renfermaient de nombreuses *Hyella caespitosa* à l'état de dissociation gloeocapsoïde. Un certain nombre de cellules étaient vivantes, d'autres, entourées d'épaisses gaines gélatineuses, se trouvaient dans divers stades d'atrophie et de nécrobiose, et, en conséquence, il y avait beaucoup de gaines entièrement vides qui se dissolvaient et se détruisaient peu à peu.[1] Les algues étaient entirement entourées de carbonate de chaux.

Comment faut-il expliquer ce phénomène? On sait que ces algues dissolvent énergiquement le carbonate de calcium. Nous avons ici un processus inverse — la précipitation du carbonate de calcium. Si cela est également un résultat de l'activité vitale de ces mêmes algues, il peut être question de la reversibilité de leur fonction biologique, ou plutôt biochimique. Ou bien l'apparition du dépôt calcaire serait-elle due à une autre cause, p. e. à l'action biochimique des bactéries, et l'apparition des algues perforantes n'offrirait-elle ici qu'un phénomène secondaire? En 1903, dans mon livre intitulé «Les microorganismes comme agents géologiques», j'avais déjà démontré, en me basant sur des données expérimentales, que différentes bactéries, aussi bien que les Actinomycètes, pouvaient précipiter en cultures pures le $CaCO_3$ en quantité considérable et que ce processus pouvait avoir lieu et offrir une grande importance dans l'eau des mers et des lacs salés. Ceci fut confirmé plus tard par les recherches de Drew, Molisch et Bavendamm.[2] Moi-même, j'ai fourni il y a quelques années des données complémentaires sur cette question.[3]

En ce qui concerne les algues précipitant le carbonate de calcium à leur superficie, ce sont surtout les algues bleues ou Cyanophycées. Quant aux tufs formés de cette façon ou aux dépôts calcaires d'un autre type, il existe à ce sujet, comme on sait, toute une littérature. Pia[4] en a donné récemment un exposé détaillé. Cependant, le mécanisme de ce processus chez

[1] V. plus haut.

[2] W. Bavendamm. Die microbiologische Kalkfällung in der tropischen See. Arch. f. Mikrobiol., Bd. III, 1932, S. 205; on y trouve également une liste détaillée de la littérature.

[3] G. Nadson. Beitrag zur Kenntnis der bakteriogenen Kalkablagerungen. Arch. f. Hydrobiol., Bd. 19, 1927, S. 154.

[4] J. Pia. Pflanzen als Gesteinsbildner, 1926.

les algues n'est pas encore élucidé. Selon l'avis de Geitler,[1] chez les algues bleues, ce sont également les bactéries se trouvant à la surface de celles-ci qui y jouent probablement un certain rôle. «In vielen, vielleicht in den meisten Fällen, — dit cet auteur — sind aber wahrscheinlich kalkbildende Bakterien, die konstant in der Gallerte der Alge leben, die Ursache». Cette supposition demande encore des preuves.

Je ne vois pas de raison de nier en ce cas-ci la faculté des algues mêmes de précipiter à leur superficie le $CaCO_3$, ne fût-ce qu'en vue du fait de l'existence de nombreuses algues vertes et rouges possédant sans aucun doute cette faculté. En vue de la localisation des tubercules susindiqués de carbonate de calcium aux endroits de la coquille où ce trouvent les algues perforantes, je suppose qu'il y a lieu d'admettre ici aussi la participation à la précipitation de $CaCO_3$ des algues mêmes aussi bien que des bactéries. En ce cas il y a lieu d'attribuer aux algues perforantes *Hyella* et *Mastigocoleus* la faculté de détruire les dépôts calcaires aussi bien que de les créer: donc, d'admettre la reversibilité du processus.

A en juger d'après les données de la littérature recueillies par moi, cette faculté double de détruire, de même que de créer des dépôts calcaires est également propre à d'autres algues bleues, mais jusqu'à ce jour on y a prêté peu d'attention.

Je me bornerai à donner ici les indications ci-après. Ainsi, diverses espèces de *Schizothrix* forment, comme on le savait depuis longtemps, des dépôts calcaires considérables et en même temps il se trouve qu'elles ont la faculté de carier, c'est-à-dire de détruire les pierres calcaires en agissant donc comme des «algues perforantes». Chodat[2] en étudiant les «galets sculptés» des lacs suisses, constata que la *Schizothrix* perforait les petites pierres calcaires en les transformant en «galets sculptés» et pénétrait à l'intérieur de ces pierres à une profondeur de 1—2 mm. «Ce sont des *Schizothrix*, — dit cet auteur, — qui pénètrent tout d'abord dans la pierre».

Le Roux[3] en examinant la question de la formation de «galets» et de tufs calcaires lacustres, indique également l'activité créatrice et destructrice des *Schizothrix*: «Les principaux agents de la formation des tufs lacustres et de la carie des pierres sont des algues Schizophycées rentrant dans le

[1] L. Geitler. *Cyanophyceae.* — A. Pascher's «Die Süsswasserflora von Deutschland etc.». H. 12, 1925, S. 42.

[2] R. Chodat. Les galets sculptés du rivage des lacs jurassiques. — Bull. de l'Herbier Boissier, t. 6, 1898, p. 454.

[3] M. Le Roux. Recherches biologiques sur le lac d'Annecy. Ann. d. biol. lacustre, t. II, 1907—08, p. 356.

genre *Schizothrix* (s. g. *Inactis*) et *Hypheothrix*». Fritsch,[1] dans un article sur diverses algues bleues incrustées de carbonate de calcium (*Oncobyrsa, Xenococcus*, *Chamaesiphon* etc.), mentionne également leur faculté de carier les substances calcaires («erosive effect on the pebbles and boulders»). Ainsi que le nom même l'indique, le *Phormidium incrustatum* Gom. est incrusté de $CaCO_3$ précipité, et cette même algue, selon les observations de Bornet et Flahault,[2] perfore les coquilles d'*Unio* en pénétrant à l'intérieur de celles-ci jusqu'à une profondeur de 3 *mm.* Tout cela ne concerne, toutefois, que les algues d'eau douce. On ne peut guère douter, cependant, que des phénomènes analogues n'existent aussi dans les mers, seulement les indications que nous possédons à ce sujet son très modiques. L'*Hyella* et le *Mastigocoleus* étant des formes marines, j'ai cru utile d'exposer ici mes observations d'une manière un peu plus détaillée.

Je puis y ajouter, de plus, que Hansgirg[3] a observé quelque chose d'analogue dans la mer; malheureusement, il ne s'est pas arrêté sur les détails de ce phénomène excessivement intéressant, en ce contentant de remarquer en passant que les filaments de l'*Hyella caespitosa* var. *spirorbicola* étaient quelquefois incrustés de carbonate de calcium.

L'incrustation ou l'imprégnation des algues par le carbonate de chaux, de même que le processus inverse de la pénétration dans la substance calcaire et la dissolution de celle-ci, comme le font les algues «perforantes», ont un sens biologique égal: dans les deux cas il s'agit d'une adaptation défensive; par l'un et l'autre moyen, — soit par l'un ou l'autre moyen — l'algue se défend contre les influences extérieures ennemies. En même temps les phénomènes que nous décrivons nous montrent, sur une échelle encore plus grande, le rôle de ces algues dans la circulation des éléments et, en premier lieu, celui de la circulation du calcium.

III. Sur la tolérance des algues perforantes, leur pouvoir d'adaptation à des conditions de vie variées et leur expansion dans la nature

Les algues perforantes sont très répandues dans les mers et dans les eaux douces, ce qui dépend certainement de leur grande tolérance et de leur

[1] F. Fritsch. The encrusting Algal Communities etc. The New Phytologist, vol. 28, 1929, p. 192.

[2] E. Bornet et Ch. Flahault. Sur quelques plantes vivant dans le teste calcaire de mollusques. Bull. Soc. bot. de France, t. 36, 1889, p. 164.

[3] A. Hansgirg. Neue Beiträge zur Kenntnis der Meeresalgen-und Bakterien-Flora der Oesterreichisch-Ungarischen Küstenländer. Sitz. Ber. d. böhmisch. Ges. d. Wiss. Math.-Naturw. Kl., Jahrg. 1892, S. 226.

pouvoir d'adaptation à des conditions d'existence variées. Voici ce que j'ai déjà écrit en 1900:[1] «Grâce aux particularités de leur organisation, les algues perforantes résistent facilement aux conditions défavorables pour la vie, soit au froid, aux rayons brûlants du soleil, à la sécheresse temporaire, à l'augmentation considérable de la concentration de sels dans l'eau ambiante, et ne périssent pas. Elles sont résistantes et pas exigeantes».

Je voudrais compléter ici ces données en me basant sur mes observations ultérieures. En premier lieu, je m'occuperai des conditions de température. Le fait que les algues perforantes: *Gomontia polyrhiza*, *Ostreobium Quecketti*, *Hyella caespitosa* sont largement répandues dans les mers, depuis les mers arctiques et antarctiques où la température de l'eau se rapproche souvent de 0°, jusqu'aux mers tropicales où, à des places peu profondes dans la zone littorale, elle peut s'élever à 30°, ce fait, dis-je, témoigne suffisamment de leur tolérance. J'ai observé à la station biologique de Sébastopol en Crimée que les dites algues, placées dans de petits récipients de verre, supportaient facilement en été un échauffement journalier de l'eau jusqu'à 37° C; ceci durait plusieurs jours et peut-être bien plus longtemps.

La facilité d'adaptation de ces algues aux températures différentes est confirmée également par le fait que les mêmes espèces d'algues vivent dans les couches superficielles de l'eau aussi bien qu'à des profondeurs considérables. Par exemple, j'ai trouvé dans la Mer Noire (baie de Sébastopol et ses environs) des algues perforantes *Gomontia*, *Ostreobium*, *Hyella* et *Plectonema*, à une profondeur de 50 *m*, c'est-à-dire presqu'à la limite de l'habitat des algues en général dans la région en question. Et par endroits, elles paraissent être, en effet, les dernières algues qui aient pénétré jusqu'à cette profondeur.

Dans le golfe de Naples (Bocca piccola) j'ai trouvé en parfait état l'*Osreobium Quecketti* et le *Plectonema terebrans* même à une profondeur de 80 *m*. Printz[2] affirme que sur les côtes de Norwége, dans le fiord Trondhjem, l'*Ostreobium Quecketti* est fort répandu et se rencontre depuis la limite du flux-reflux jusqu'à la limite inférieure de l'extension des algues en général, notamment jusqu'à une profondeur de 30 *m*. Nous possédons des indications analogues concernant ces algues également pour les côtes Atlantiques de France.[3]

[1] G. Nadson. 1900, l. c., p. 36.

[2] H. Printz. Die Algenvegetation des Trondhjemsfjordes. Skrifter Det Norske Videnskabs-Akademi i Oslo, Mat.-natur. Kl., 1926, № 5, S. 257.

[3] Il existe des indications relatives à des algues perforantes trouvées à des profondeurs beaucoup plus considérables, au-dessous de la limite de l'habitat des algues en général, mais ce

D'autre part, les algues perforantes peuvent rester hors de l'eau très longtemps. Ainsi, sur les rochers escarpés de l'île Helgoland dans la Mer du Nord, à des endroits que la marée la plus haute n'atteint jamais et qui ne sont humectés que par les embruns, on trouve des Balanes (*Balanus balanoides L.*) en très grand nombre. Dans leurs coquilles calcaires couvertes souvent toutes entières de taches bleu-vertes ou brun-vertes, se nichent de nombreuses algues perforantes: *Gomontia polyrhiza*, *Hyella caespitosa*, *Plectonema terebrans*. L'*Hyella caespitosa* perfore non seulement ces coquilles, mais elle pénètre dans la pierre même, dans la roche fondamentale de l'île contenant de la chaux. L'algue perfore cette roche, l'amollit, la détruit en facilitant ainsi l'oeuvre destructrice des vagues qui rongent l'île déjà depuis des siècles et finiront sans aucun doute par la faire disparaître entièrement de la surface de la mer.

Cette même algue a été trouvée par moi au-dessus de la surface de l'eau également en Crimée dans la région des roches calcaires, souvent sur une grande étendue; elle végétait ici isolément ou faisait partie d'un lichen (*Verrucaria*) sous forme de gonidies de celui-ci.

Dans la baie d'Hapsal (Mer Baltique) j'ai trouvé des pierres avec des algues perforantes (*Gomontia polyrhiza*, *Hyella caespitosa*) jetées au loin sur la côte par les vagues pendant les vents forts du printemps. En été ces pierres gisaient des semaines entières sur la terre sèche, souvent sous les rayons brûlants du soleil, et néanmoins les algues abritées sous d'épaisses membranes ou gaines restaient vivantes. J'ai eu l'occasion d'observer un phénomène analogue sur les bords de l'île de Kildin (Océan Glacial du Nord; côte de Mourman): sur des galets et des pierres, rarement inondées par les marées hautes et restant sèches pendant de longues périodes, végétaient les deux algues perforantes déjà citées. Il est certain que cela a lieu également dans d'autres mers dans la région du flux et du reflux.

Les algues perforantes peuvent s'adapter aussi facilement à la vie dans de l'eau de salinité différente. Ceci résulte déjà du fait qu'on en trouve dans des mers dont l'eau contient des quantités de sel très différentes. *Gomontia*, *Hyella*, *Plectonema* végètent bien dans les océans dont l'eau contient environ 3.5 p. c. de sel, de même que dans la baie d'Hapsal de la Mer Baltique dont l'eau saumâtre ne contient qu'environ 0.5 p. c. de sel.

Elles peuvent s'adapter facilement à des salinités de l'eau élevées et variables. Dans la baie d'Hapsal que je viens de citer, pas profonde, dont

fait demande encore à être vérifié. Pour ce qui concerne le changement de coloration des algues perforantes selon les profondeurs, v. mes travaux indiqués plus haut.

l'eau n'est que très peu salée, on peut observer souvent que dans les dépressions de la côte peu profondes séparées de la mer, l'eau qui s'est conservée jusqu'à la fin de l'été devient beaucoup plus salée par suite de l'évaporation; néanmoins les algues perforantes le supportent très bien et restent vivantes.

De même, *Gomontia polyrhiza*, *Hyella caespitosa*, *Mastigocoleus testarum*, *Plectonema terebrans*, qui végétaient dans mon aquarium dans des coquilles provenant de l'île de Sylt (Mer du Nord), restaient vivantes pendant que l'eau s'évaporait lentement (durant des mois) et que la proportion de sel s'élevait de 3.5 p. c. à 7 p. c. et au-delà. Plusieurs de ces algues avaient subi cette élévation de salinité à maintes reprises et, étant transportées dans de l'eau de salinité normale (3.5 p. c.), continuaient à se développer et à se propager; certaines d'entre elles vivent chez moi jusqu'à ce jour (dans l'aquarium depuis 1898).[1]

J'ai entrepris également des expériences dans ce sens à le station biologique de Sébastopol (1929). L'*Hyella* et l'*Ostreobium*, recueillies à une profondeur de 6 à 8 *m*, étaient posées dans des récipients de verre peu profonds placés à l'ombre. Pendant les chaleurs d'été l'eau s'évaporait rapidement, en 2-3 jours, et la salinité, qui à l'origine comportait 2 p. c. de sels, augmentait de 2 ou de 3 fois. En cette occasion également les algues supportaient facilement cette élévation de salinité relativement rapide.

A. Ercegović, dans son travail intéressant paru en 1930,[2] cite une série de faits analogues témoignant d'une tolérance considérable des algues perforantes vis-à-vis des variations de la salinité; de plus, différentes espèces d'algues possèdent ce pouvoir à un degré inégal. Ainsi, d'après les observations d'Ercegović sur la côte Adriatique, où, dans les petites cuvettes des rochers, la concentration des sels oscille entre 0 et 283 pour mille, on rencontre les formes perforantes: *Solentia*, *Hormathonema* et *Scopulonema*, tandis qu'on n'y trouve ni *Hyella*, ni *Mastigocoleus*; ces deux dernières espèces font également défaut dans les localités à salinité considérablement diminuée ou variable.

A ce propos, je voudrais faire les deux remarques suivantes. Premièrement, j'ai trouvé l'*Hyella* ainsi que le *Mastigocoleus* (formes typiques-selon la description de Bornet et Flahault) dans des endroits où la salinité variait sensiblement en plus ou en moins; secondement, il y a lieu de noter

1 Ceci a été décrit plus haut avec plus de détails.

2 A. Ercegović. Sur la tolérance des Cyanophycées vis-à-vis des variations brusques de a salinité de l'eau de mer. Acta Bot. Inst. Bot. Univ. Zagreb., vol. V, 1930, p. 48.

que les nouveaux genres d'Ercegović: *Dalmatella*, *Scopulonema*, *Solentia* et *Hormathonema*, ont probablement (ce dont il a été question plus haut) un rapport génétique avec l'*Hyella* et le *Mastigocoleus*, et sont, à mon avis, des formes d'adaptation à des conditions spéciales de la vie. Il est évident qu'étant données les variations considérables de salinité, c'étaient précisément ces formes-là qu'Ercegović devait trouver.

J'ai eu souvent l'occasion d'observer que les algues perforantes pouvaient supporter non seulement une augmentation considérable de la salinité de l'eau, mais également une dessalure sensible de celle-ci et même le remplacement de l'eau salée par de l'eau douce. Je ne citerai ici que quelques exemples. Ainsi, pendant la marée basse ces algues peuvent rester sur la côte des heures entières sous la pluie ou se conserver dans les mares formées par la pluie en attendant le flux suivant.

Près de la ville d'Alexandrovsk (côte de Mourman, Océan Glacial du Nord), j'ai trouvé des coquilles avec des algues perforantes, vivantes et bien développées en des endroits de la côte régulièrement baignés à chaque marée par l'eau douce d'un ruisseau qui venait se jeter ici dans la mer. Ensuite, j'ai trouvé des algues perforantes (*Gomontia polyrhiza*, *Ostreobium Quecketti*, *Hyella caespitosa*, *Mastigocoleus testarum*) sur des pierres calcaires et des coquilles près de la ville de Nikolajev à l'embouchure du Boug du Sud, fleuve qui se jette non loin de là dans la Mer Noire. L'eau y est absolument douce et quelquefois seulement elle est légèrement saumâtre. Les algues susdites y végétaient abondamment, étaient en fort bon état et ne différaient en rien d'essentiel de celles qui croissaient plus loin dans la mer.

On sait que le *Plectonema terebrans* habite dans les eaux douces aussi bien que dans les mers.

En me basant sur les données recueillies par moi en divers endroits je peux affirmer que les cinq espèces d'algues que je viens de citer sont répandues depuis les mers arctiques lointaines jusqu'aux mers tropicales. L'*Ostreobium Reinekei*, qui vit dans les mers tropicales, ne diffère qu'insensiblement de l'*Ostreobium Quecketti* largement répandu dans des mers différentes, et n'offre plutôt qu'une variété de ce dernier. On peut en dire autant des formes tropicales de *l'Hyella* et du *Mastigocoleus*. Ces formes sont identiques à celles des mers septentrionales et tempérées ou bien n'en diffèrent pas sensiblement. Il faut noter également, que l'algue perforante d'eau douce l'*Hyella fontana* devrait être considérée plutôt comme une variété de l'*Hyella caespitosa* forme marine (tant elle s'en raproche) qu'une espèce absolument distincte; de même, le *Mastigocoleus testarum* n'est représenté dans les ri-

vières que par la variété *M. testarum* var. *aquae dulcis.*[1] Quant à l'algue perforante d'eau douce *Foreliella perforans* décrite par Chodat, elle se rapproche de très près de *Gomontia* et ne mériterait guère d'être classée comme un genre distinct. Pour autant que je sache, c'est seulement l'*Ostreobium* qu'on n'ait pas rencontré jusqu'à présent dans des eaux constamment douces. Il a été dit plus haut que cette algue pouvait vivre temporairement dans l'eau douce.

Nous ferons remarquer ensuite que les algues perforantes sont tolérantes non seulement vis-à-vis des changements de température et de salinité des eaux, mais encore vis-à-vis de la contamination de celles-ci par des matières organiques. Ainsi, j'en ai trouvé dans les parties souillées des baies de Sébastopol et de Hapsal; dans cette dernière j'en ai rencontré même aux endroits au fond desquels on trouve du limon noir («boue médicale») produit par la fermentation hydrosulfureuse.

Ces mêmes algues (*Gomontia polyrhiza, Hyella caespitosa*) furent également trouvées par moi en quantité considérable près de Bakou (Mer Caspienne) en des endroits fortement souillés par du naphte. Les conditions de vie n'y étaient, certes, pas très favorables, néanmoins ces algues y vivaient et multipliaient.

Les eaux basses et calmes dans les mers, surtout dans les mers des zones chaudes, offrent, paraît-il (selon les données que j'ai à ma disposition) les meilleures conditions pour le développement et la propagation des algues perforantes de même que pour la destruction des substances calcaires par ces algues. Ainsi qu'il a déjà été mentionné, ces substances peuvent être très variées: les roches et pierres calcaires ou contenant du carbonate de chaux et de magnésium ainsi que les dolomites, le carbonate de calcium jouant le rôle du ciment dans les grès calcaires et dans les gisements de mollusques, tout cela de systèmes et d'âges géologiques différents; ensuite les coquilles des mollusques les plus variés, — il n'est guère probable qu'on puisse trouver des coquilles de mollusqnes qui ne puissent être perforées par les algues en question.

On en trouve également dans les tubes calcaires des vers, dans les os (de poissons, de baleines etc.) et surtout dans les coraux. Des algues perforantes: *Gomontia polyrhiza, Ostreobium Queketti* et surtout *Ostreobium Reinekei, Hyella caespitosa, Mastigocoleus testarum* furent trouvées par mes prédécesseurs[2] et par moi-même sur des coraux dans des mers différentes.

[1] G. Nadson. V. plus haut.

[2] Je dois signaler ici particulièrement le travail de J. E. Duerden: Boring algae as agents in the desintegration of Corals. Bull. of the Amer. Mus. of Nat. Hist., vol. 16, 1902, p. 323

Ces algues perforent tout d'abord les grandes constructions coralliennes, coraux des récifs de la mer; elles rongent souvent les buissons et les branches de coraux à la base. Il est évident que c'est précisément en cet endroit, percé par les algues perforantes, que le corail se brise au choc des vagues. Entre autres, sur un grand échantillon du corail *Goniopora,* trouvé prés des côtes de la Nouvelle Poméranie, j'ai pu démontrer au Musée Zoologique de Berlin (en 1912) que le coup étant porté de côté, le corail se brisait précisément plus près de la base dans la partie colorée en vert et perforée par de nombreux filaments d'*Ostreobium.* Ensuite, elles perforent et détruisent non seulement le squelette des coraux et leurs grands tronçons, mais même le menu gravier corallien. De cette façon il y a lieu de leur attribuer un rôle important dans la destruction des bancs de coraux en général.[1]

Leur activité doit se manifester d'une manière particulièrement intense dans les parties de la lagune corallienne moins profondes et abritées contre les vagues. De plus, ces algues prennent une grande part à la formation des atolls.

Du reste, ainsi qu'il a éte indiqué plus haut, les algues perforantes peuvent vivre dans la zone du ressac le plus fort. De même, dans les eaux douces, elles peuvent vivre dans des courants rapides aussi bien que dans des eaux calmes. Ainsi, j'ai trouvé des quantités enormes d'*Hyella fontana, Plectonema terebrans* et *Mastigocoleus testarum* var. *aquae dulcis* au fond des rivières du Nord-Ouest d'USSR (soit des rivières Narowa, Msta, Wolkhov) dans la région des cataractes et cela sur une très grande étendue.

Il y a lieu de faire remarquer que l'opinion très répandue[2] selon laquelle les algues perforantes se rencontrent rarement dans les eaux douces, est tout-à-fait erronée. Ceci dépend peut-être de ce qu'on les avait cherchées surtout sur des coquilles de mollusques. Il suffit, cependant, de faire observer que sur la rivière Wolkhov, dans la région des cataractes, de même qu'en aval et en amont de celles-ci, sur une étendue du plusieurs dizaines de kilomètres au moins, le lit de la rivière, composé de roches calcaires, est recouvert depuis la ligne du bord jusqu'à une profondeur considérable de

Cet auteur a indiqué que les algues perforantes (il dit de ces formes qu'elles appartenaient «probablement» aux genres *Gomontia* et *Ostreobium*) étaient très répandues dans les coraux des Indes Occidentales. C'est lui également qui a attiré l'attention sur l'importance possible de leur rôle dans la formation des atolls.

[1] G. Nadson. Les algues perforantes, leur distribution et leur rôle dans la nature. C. R. Acad. d. Sci. Paris, t. 184, 1927, p. 1015. J'ai l'intention de revenir encore à cette question dans un travail spécial.

[2] L. Geitler. *Cyanophyceae.* Pascher's, Die Süsswasserflora Deutschlands. H. 12, 1925, S. 43.

taches bleu-vertes provenant des algues perforantes qui y sont répandues en masse. Je suis même enclin à affirmer que dans tous les lacs, dans toutes les mers et rivières où l'on trouve des substances calcaires et où la vie des algues est possible en général, on rencontre partout des algues perforantes.

Dans mes travaux antérieurs[1] j'avais déjà indiqué que ces algues étaient largement répandues dans la nature; pour confirmer mon assertion je me bornerai ici à nommer quelques localités où l'on a trouvé des algues perforantes, en indiquant le nom des auteurs qui les y ont notées:

Océan Glacial du Nord; îles de Kildin et de Kolgoueff; péninsule de Kanine (Nadson).
Groenland et Islande (L. Kolderup-Rosenvinge).
Alaska (Saunders).
Kamtchatka et baie d'Oussoury (Nadson).
Japon (Jendo).
Océan Atlantique, côtes d'Europe, et Mer Baltique (plusieurs auteurs).
Côtes Atlantiques et Pacifiques des États-Unis de l'Amérique du Nord (Setchell — Holden — Collins).
Méditerranée; Naples, Villefranche-sur-Mer, côtes de Grèce et d'Algérie (Nadson), Etang de Thau (Flahault); côtes Adriatiques (Ercegović).
Îles Canaries (E. Börgesen).
Mer Rouge: Arabie Occidentale, port Soudan (Nadson).
Océan Indien: Côtes de Ceylon et de Java (Nadson); mers des Indes Orientales, Siboga (A. Weber-van. Bosse).
Nouvelle Guinée (Nadson).
Océan Pacifique: Columbia (Flahault); îles de Sandwitch (Bornet); île de Taïti (H. Moseley et W. Thomson); îles de Samoa (Reinbold); Nouvelle Zélande (R. Laing).
Indes Occidentales: Portorico (Nadson); Jamaïque (Collins, Duerden).
Côte occidentale de l'Afrique de Sud (E. Barton).
Îles de Falkland (A. Cotton).
Terre de Feu et Cap Horn (P. Hariot).
Mers Antarctiques (L. Gain).

Il ne faudrait pas perdre de vue non plus que les algues perforantes non seulement sont très répandues dans les mers à notre époque, mais qu'elles l'étaient également pendant les périodes géologiques antérieures. En effet, dès l'âge silurien on rencontre dans les coquilles de mollusques, dans les coraux, dans les arêtes et écailles de poissons, des canaux et galeries caractéristiques percés par des microorganismes perforants. Il existe à ce sujet une littérature spéciale assez abondante.[2] La grande majorité des auteurs croyaient que ces microorganismes étaient des champignons (*Saprolegnia*, *Achlya*, *Palaeachlya* etc.). Cependant, en examinant les descriptions

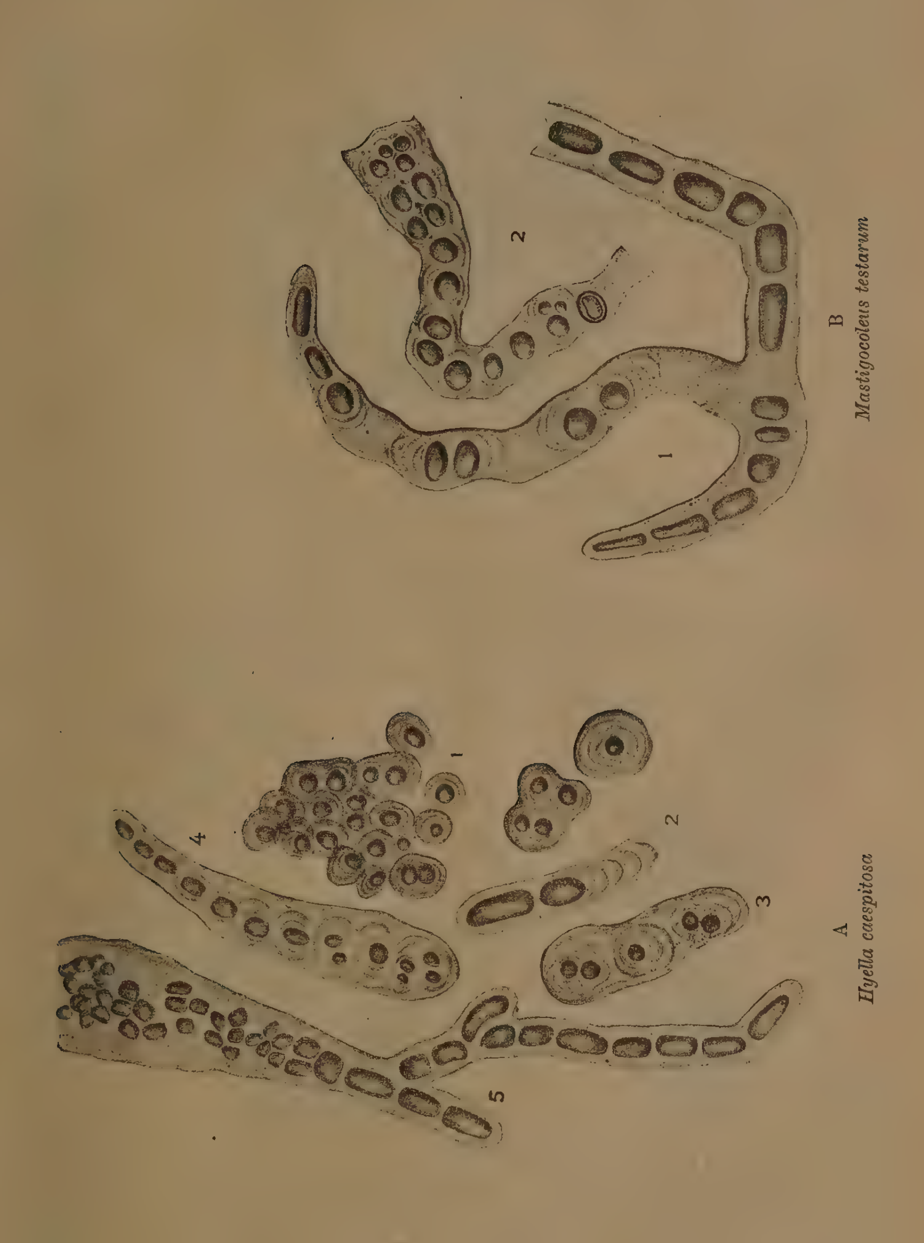
[1] Principalement: G. Nadson. Les algues perforantes, 1927.

[2] Les travaux principaux sont cités chez Bornet et Flahault, l. c.; voir aussi les articles de Dunkan dans les Proc. of the R. Soc. London, vol. 25, 1876.



B *Hyella caespitosa*

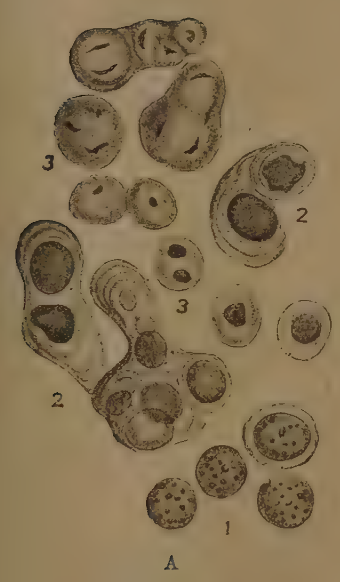
A *Mastigocolcus testarum et Hyella caespitosa*


B
Mastigocoleus testarum
1
2
A
Hyella caespitosa
1
2
3
4
5



C

Tubercules calcaires sur la coquille de *Cardium*



A

Hyella caespitosa



B

Mastigocoleus testarum,
var. *aquae dulcis*

faites par ces auteurs et surtout leurs dessins, j'ai acquis la conviction que pour ce qui concerne au moins la grande majorité des cas, ce ne sont point des champignons, mais des algues perforantes. De plus, ces algues sont très rapprochées (sinon identiques) des algues perforantes vivant actuellement — *Gomontia, Ostreobium, Hyella*. Le geologue Dunkan affirme également que les organismes perforants qui ont laissé des canaux dans les coraux siluriens sont très ressemblants sinon identiques à ceux qui vivent de nos jours dans les coraux. Malheureusement cet auteur les prend aussi pour des champignons et les décrit sous le nom de *Saprolegnia ferox* et *Achlya penetrans*. Cependant, en me basant sur ses descriptions et surtout sur ses dessins[1] j'y reconnais sans hésiter l'algue perforante l'*Ostreobium* à son réseau de canaux si caractéristique. Sans entrer dans les détails de cette question, dans l'espoir d'y revenir encore dans la suite, je suppose que tout ce qui a été exposé ci-dessus relativement aux algues perforantes prouve incontestablement leur rôle éminent dans l'économie de la nature et dans la grande circulation des éléments dans les mers et les eaux douces.

Leningrad, Jardin Botanique, mai 1930.

---

[1] Dunkan. l. c., p. 254; tabl. 7, fig. 38—39, 44—47.

ПОПРАВКИ К № 10 ИМЕН ЗА 1931 г.

Автор помещенной в означенном номере ИМЕН статьи (стр. 1329—1346) «Некоторые данные исследования рентгеновских спектров монацитов Борщовочного кряжа (Забайкалье)», К. К. Матвеев, просит отметить, на предмет исправления, следующие ошибки, допущенные в названной статье:

Стр. 1333, строка 2-я, в «Замечаниях» вместо № 2 надо № 22.

» 1336 против № 8 вместо 7.75 мм следует 7.65 мм.

» 1337 в строке под № 26 вместо 24 6.7 надо 20 6.7

» 1338 в строке под № 2 (угол скольжения) вместо $9^\circ 25.1'$ должно быть $6^\circ 25.1'$

» 1339 в строке под № 36 вместо 86.2 мм надо 86.6 мм. В графе под знаком Δ в строке под № 41 вместо 0.3 надо $+0.3$ и в строке под № 43 вместо 0.4 следует $+0.4$

» 1340 скоба, заключащая №№ 14—20, излишня. В строке против № 48 знак? излишен.

» 1343 против № 32 в последней колонке вместо 1 следует 2.

» 1344 в списке линий Y в строке под № 1 вместо $Y\alpha K_1$ следует $YK\alpha_1$. В примечании 2-м на той же странице в первом случае ссылки на анализ (в скобках, стоит № 6) надо поставить № 7, а во втором (стоит № 7) — № 6.

Оглавление — Sommaire

Заглавие, отмеченное звёздочкой, является переводом заглавия оригинала.
Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original.

Цена 3 руб.